c

Les polynômes

Bcpst 1 — 27 février 2017

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

I — Fonctions polynômes

I.1 — Définition

On note par convention $x \mapsto x^0$ la fonction constante égale à 1.

Définition 1.1 — Fonction polynôme

On appelle monôme » ou fonction monôme toute fonction de $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *de la forme* $x \mapsto x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

La fonction P est une fonction polynôme (ou simplement un polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ *si et seulement si*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Notez que par définition une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.2 — Coefficients du polynôme nul

Les coefficients du polynôme nul sont tous nuls.

Dém. Plus précisément, soit P un polynôme dont les coefficients sont $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

Et on veut montrer que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ En prenant $x=0$, on trouve $a_0=0$, puis

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad P(x)=x(a_1+\cdots+a_nx^{n-1})=0$$

donc
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad a_1+\cdots+a_nx^{n-1}=0$$

En prenant la limite de cette expression en 0 (et non pas sa valeur en 0), on a $a_1=0$. On répète alors ce dernier raisonnement et on trouve $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$.

Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ Chaque coefficient a_k peut s'écrire sous la forme

$$\forall k\in[\![\,0\,;n\,]\!],\exists(\alpha_k,\beta_k)\in\mathbb{R}^2\qquad a_k=\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k$$

et le polynôme P s'écrit donc comme combinaison linéaire de deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{C},\qquad P(x)=\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_kx^k\right)}_{A(x)}+\mathrm{i}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_kx^k\right)}_{B(x)}$$

puisque $\forall x\in\mathbb{R},\qquad A(x)=B(x)=0$

et que $\qquad (A,B)\in\mathbb{R}[x]^2$

on a $\forall k\in[\![\,0\,;n\,]\!],\qquad \alpha_k=\beta_k=0$

donc $\forall k\in[\![\,0\,;n\,]\!],\qquad a_k=0$

□

Corollaire 1.3 — *La famille de fonctions polynômes $(x\to1,x\to x,x\to x^2,\dots,x\to x^n)$ est libre.*

Comme cette famille est visiblement une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[x]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Théorème 1.4 — Théorème fondamental sur les polynômes

Deux fonctions polynômes sont égales sur $\mathbb{K}$ si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Dém. On remarque simplement que si $P-Q$ est la fonction nulle, ses coefficients sont nuls. □

Vocabulaire et notations

- Les réels $a_0,a_1,\dots,a_n$ s'appellent les coefficients du polynôme P.
- La fonction constante nulle est un polynôme : le polynôme nul.

– L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[x]$ (ou $\mathbb{K}[X]$ selon la manière dont on note l'inconnue).
– Un polynôme P qui s'écrit de la forme précédente est dit « de degré inférieur ou égal à n ». L'ensemble de ces polynômes est noté $\mathbb{K}_n[x]$

La notion de degré est définie plus précisément ci-dessous.

II — Opérations sur les polynômes

Propriété 2.1 — Combinaison linéaire de polynômes

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P,Q) \in (\mathbb{K}[x])^2$.

Alors les fonctions $P+Q$ et λP sont des fonctions polynômes.

Dém. Si P et Q s'écrivent respectivement

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad \begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \end{aligned}$$

et si λ est un réel alors

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad \begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ \lambda P(x) &= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n \end{aligned}$$

d'où on constate que ces deux fonctions sont bien des fonctions polynômes. □

La démonstration précédente montre, de plus, que si P et Q sont de degré au plus n, alors il en va de même de $P+Q$ et de λP. On en tire

Corollaire 2.2 — *Les ensembles $\mathbb{K}[x]$ et $\mathbb{K}_n[x]$ sont deux sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.*

Propriété 2.3 — Produit de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes. La fonction $P \times Q$ est également une fonction polynôme.

Dém. Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, le produit de x^k par x^i est x^{k+i}.

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $Q \in \mathbb{K}[x]$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad \begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \end{aligned}$$

avec $\left(a_0, a_1, \dots, a_p\right) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$.
La fonction produit de P et de Q est obtenue en multipliant les expressions $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ en utilisant les propriétés habituelles de la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad (P \times Q)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$$

En posant

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n+m]\!], \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

avec la convention $a_i = 0$ si $i > n$ et $b_j = 0$ si $j > m$.
On obtient bien une fonction polynôme. □

Propriété 2.4 — Composée de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes. La fonction $P \circ Q$ est une fonction polynôme.

Dém. En détaillant la composition. □

On dit parfois que l'on substitue le polynôme Q à l'indéterminée x.

Exemple

- Si $P = x^2 - 3x + 2$ et $Q = x + 1$, alors $P \circ Q(x) =$
- Si $P = x^2 - 2x + 1$ alors $P(x+1) =$
- Si $P = x^2 - 2x + 1$ alors $(x+1)P =$

Remarquer que si P est un polynôme constant, alors $P \circ Q = P$.

Propriété 2.5 — Polynôme dérivé

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul, s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
Le polynôme dérivée du polynôme P est la fonction

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Dans $\mathbb{C}$, le polynôme dérivée est *défini* par la propriété précédente (car nous n'avons aucune théorie sur la dérivation d'une fonction d'une variable complexe). On admet que la plupart des résultats sur la dérivation demeurent exacts dans ce cas là.

On rappelle qu'on peut parler de polynôme dérivée d'ordre 2 (puis 3, 4, etc.) comme le polynôme dérivé de P' (puis de $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, etc.). On les note P'', $P^{(3)}$, $P^{(k)}$, etc. (à ne pas confondre avec le polynôme P élevé au carré, au cube, à la puissance k, qui se notent P^2, P^3, P^k, etc.).

Propriété 2.6 — Propriété de la dérivation de polynômes

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$

1) $(P+Q)' = P' + Q'$;
2) $(\lambda P)' = \lambda P'$;
3) $(P \times Q)' = P'Q + Q'P$.
4) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

III — Degré

Définition 3.1 — Degré d'un polynôme non nul

Soit P un polynôme non nul s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

L'ensemble des entiers $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément : c'est le degré du polynôme P.

Dans ce cas, a_n est le coefficient de plus haut degré de P et $a_n x^n$ son le monôme de plus haut degré de P.

On note $n = \mathrm{d}^\circ(P)$.

Noter qu'il est nécessaire que P ne soit pas le polynôme nul pour que son degré soit correctement défini. Si P est le polynôme nul, on définit par convention son degré comme étant $-\infty$. Cette convention prendre son sens plus tard.

Remarque I.0

- $\mathrm{d}^\circ(P) = 0$ si et seulement si P est une fonction constante constant.
- L'écriture « $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ », ne signifie *pas* que P est de degré n : a_n peut tout à fait être nul... Cette écriture signifie seulement que P est un polynôme de degré *au plus* n.
- L'écriture « $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ » assure que P est un polynôme de degré n.

Notation Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[x]$ l'ensemble constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 1 Déterminer le degré des polynômes suivant :

1. $\mathrm{d}^\circ((x+1)^n - (x-1)^n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$;

2. $(ax+1)^n - x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a vu sur les exemples précédents que le degré de la somme n'était pas directement calculable.

Propriété 3.2 — Degré et combinaison linéaire de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

1) *Si* $\mathrm{d}^\circ(P)$ *et* $\mathrm{d}^\circ(Q)$ *sont différents alors* $\mathrm{d}^\circ(P+Q) = \sup(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$.
2) *Dans le cas général* $\mathrm{d}^\circ(P+Q) \leqslant \sup(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$.
3) *Si* $\lambda \neq 0$, *alors* $\mathrm{d}^\circ(\lambda P) = \mathrm{d}^\circ(P)$.

Dém. En écrivant les sommes.

La convention $\mathrm{d}^\circ(0) = -\infty$ permet d'étendre ce résultat au cas ou P et Q sont nuls, pourvu qu'on applique les règles suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\infty < n$$

□

Propriété 3.3 — Degré du produit de deux polynômes

Le produit de deux fonctions polynômes P et Q est une fonction polynôme de degré $\mathrm{d}^\circ(P) + \mathrm{d}^\circ(Q)$.

Dém. Si P et Q sont non nuls, il résulte du calcul précédent que $\mathrm{d}^\circ(P \times Q) \leqslant \mathrm{d}^\circ(P) + \mathrm{d}^\circ(Q)$. Or le terme de degré $n+m$ est $a_n b_m$ qui est non nul, d'où le résultat.

Si P ou Q est nul, en adoptant la convention

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\infty + n = -\infty$$

le résultat est vrai. □

Corollaire 3.4 — Intégrité de l'ensemble des polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

Si, pour tout x de $\mathbb{K}$ on a $P(x) \times Q(x) = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Dém. En considérant le degré. □

Corollaire 3.5 — « Simplification » par un polynôme non nul

Soit P, Q_1 et Q_2 trois fonction polynômes.

Si $PQ_1 = PQ_2$ et si P n'est pas le polynôme nul alors $Q_1 = Q_2$.

Propriété 3.6 — Degré de la composée de deux polynômes

Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $\mathrm{d}^\circ(P(Q)) = \mathrm{d}^\circ(P) \times \mathrm{d}^\circ(Q)$.

Dém. Si P ou Q est nul, en adoptant les conventions

$$0 \times -\infty = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\infty \times n = -\infty$$

le résultat est vrai. □

Propriété 3.7 — Degré du polynôme dérivé

Si P est une fonction polynôme non constante, alors $\mathrm{d}^\circ(P') = \mathrm{d}^\circ(P) - 1$.

Si P est constant alors P' est nul.

IV — Racines

Définition 4.1 — Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. On appelle racine du polynôme P tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Une grande question mathématique est de savoir si un polynôme donné admet une racine ou pas, et si oui combien en admet-il.

Dans $\mathbb{R}$, on connaît des polynômes qui n'ont pas de racines : $x^2 + 1$ est un exemple fameux. C'est pour résoudre ces équations qu'on a introduit la notion de nombre complexe. Or celle–ci est tellement efficace qu'on a le théorème suivant

Théorème 4.2 — Théorème de d'Alembert

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant ; P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

IV.1 — Racine et factorisation

Théorème 4.3 — Factorisation et racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et α une racine de P. Il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

Le polynôme P est dit factorisable par $(x - \alpha)$.

Dém. Avec le lemme suivant.

Lemme 4.4 — *Pour tout entier n, le polynôme $x^n - \alpha$ est factorisable par $x - \alpha$.*

Dém. En effet

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad x^n - \alpha^n = (x - \alpha) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k \alpha^{n-1-k} \qquad \square$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ P(\alpha) &= a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n \\ P(x) - P(\alpha) &= a_1(x - \alpha) + a_2(x^2 - \alpha^2) + \cdots a_n(x^n - \alpha^n) \\ P(x) &= (x - \alpha)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}\right)\right] \end{aligned}$$

Corollaire 4.5 — *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ p racines distinctes de P.*
Le polynôme P est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_p)$.

Dém. Par récurrence sur p. $\square$

Cela mène au résultat essentiel sur les polynômes.

Théorème 4.6 — **Nombre de racines d'un polynôme de degré n.**
Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n.
Le polynôme P admet au plus n racines distinctes.

Dém. En effet, d'après le résultat précédent, si P admet $n + 1$ racines distinctes on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n+1}) R(x)$$

avec R un polynôme non nul (puisque P est non nul). En développant ce produit, on constate que P aurait un coefficient non nul d'indice strictement plus grand que n, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

On écrit souvent le corollaire précédente sous la forme suivante

Corollaire 4.7 — *Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.*
Si P possède au moins $n + 1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul.

Corollaire 4.8 — *Deux fonctions polynômes sont égales en un nombre infini de points de $\mathbb{K}$ si et seulement si leurs coefficients sont égaux.*

Dém. En effet, $P-Q$ admet une infinité de racines. Il ne peut être de degré au plus n, pour aucun entier. D'où le résultat. □

IV.2 — Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 4.9 — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul.

1. *α est racine d'ordre au moins r de P si et seulement si P est factorisable par $(x-\alpha)^r$.*
2. *α est racine d'ordre r si et seulement si P est factorisable par $(x-\alpha)^r$ mais pas par $(x-\alpha)^{r+1}$. L'entier r est l'ordre de multiplicité de la racine α.*
3. *La racine α est racine multiple si son ordre de multiplicité est au moins 2, racine simple sinon.*

Exemple $(x+1)^2(x-3)^3(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$.

On peut compter les racines « deux à deux distinctes » ou « avec leur ordre de multiplicité ».

Proposition 4.10 — *Soit P un polynôme et α une racine de P d'ordre de multiplicité r. Il existe un polynôme R tel que*

$$R(\alpha) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x-\alpha)^r R(x)$$

Le théorème suivant donne une caractérisation peu intuitive, mais très pratique, de l'ordre de multiplicité

Théorème 4.11 — *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Le scalaire α est racine d'ordre r de P si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Dém. Traiter à la main le cas $\alpha = 0$ et l'appliquer au polynôme $P(x+\alpha)$. □

Corollaire 4.12 — *Soit P un polynôme et α une de ses racines. Alors α est racine simple de P si et seulement si $P'(\alpha) \neq 0$.*

Exercice 2 Montrer que les racines de $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ sont simples.

IV.3 — Dans $\mathbb{C}$

Proposition 4.13 — *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les p racines distinctes de P. Soient r_1, r_2, ... r_p leurs ordre de multiplicité respectives. Alors il existe un polynôme Q n'admettant pas de racines tel que*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - \alpha_k)^{r_k} \times Q(x)$$

Dém. Par récurrence sur le degré de P. □

Comme dans $\mathbb{C}$ tous les polynômes non constants admettent au moins une racine,

Théorème 4.14 — Factorisation dans $\mathbb{C}$

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, P non constant. On peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = A \prod_{k=1}^{p} (x - \alpha_k)^{r_k}$$

où A est le coefficient dominant de P, α_k sont les p racines distinctes de P et r_k l'ordre de multiplicité de la racine α_k.