Matrices

Bcpst 1 — 24 octobre 2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls. $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.*

I — Ensemble des matrices

Définition 1.1 — Matrice à n lignes et p colonnes

On appelle matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$ disposés dans un tableau sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Dans la notation des coefficients m_{ij} de la matrice, l'indice i représente la ligne de la matrice et l'indice j la colonne de la matrice.

Remarque I.1 Il conviendrait de noter avec une virgule entre les deux indices : $m_{1,1}$, $m_{i,j}$, etc. les coefficients de la matrice. Malgré le risque de confusion, l'absence de virgule ne présente pas de difficultés pratiques, tout en allégeant les écritures. C'est pourquoi j'omettrai cette virgule.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Dans le contexte de ce chapitre, les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

Vocabulaire

- Une matrice colonne est une matrice qui n'a qu'une colonne.
- Une matrice ligne est une matrice qui n'a qu'une ligne.

- Une matrice carrée est une matrice qui a autant de ligne que de colonne. Ce nombre s'appelle l'ordre de la matrice. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Dans le cas des matrices carrées, les coefficients $(m_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment la diagonale de la matrice.
- Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les coefficients sous la diagonale sont tous nuls ($m_{ij} = 0$ si $i > j$).
  L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont les coefficients au dessus de la diagonale sont tous nuls (($m_{ij} = 0$ si $i < j$). L'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Les matrices dont les coefficients au-dessus et en dessous de la diagonale sont nuls sont les matrices diagonales ($m_{ij} = 0$ si $i \neq j$). L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est noté $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Enfin on appellera matrice identité la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

II — Opérations sur les matrices

II.1 — Transposition

Définition 2.1 — Transposée d'une matrice

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. *On appelle* *tranposée* *de* M *et on note* ${}^tM$ *la matrice de* $\mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ *égale à* $(m_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

Concrètement on transforme les lignes de M en colonnes pour obtenir ${}^tM$. Par exemple

$$\text{la transposée de} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2 — Matrice symétrique, antisymétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que*

- M *est* *symétrique* *si et seulement si* ${}^tM = M$. *L'ensemble des matrices symétriques est noté* $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
- M *est* *antisymétrique* *si et seulement si* ${}^tM = -M$. *L'ensemble des matrices symétriques est noté* $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4\\ 2 & 4 & 8\\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est symétrique} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est antisymétrique}$$

II.2 — Addition de deux matrices, multiplication par un scalaire

Définition 2.3 — Addition et produit par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *deux matrices de* $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

- *On appelle* *produit* *de* A *par* λ *et on note* $\lambda\,.A$ *la matrice* $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *définie par*

$$\forall i \in [\![\, 1\,;n\,]\!], \quad \forall j \in [\![\, 1\,;p\,]\!], \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

– *On appelle* somme *de A et de B et on note $A+B$ la matrice $D=(d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ définie par*

$$\forall i\in[\![1\,;n]\!],\quad \forall j\in[\![1\,;p]\!],\qquad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Notez que le produit d'une matrice par un scalaire est une opération d'un type particulier : on fait opérer un scalaire sur une matrice et cela donne une nouvelle matrice.

Propriété 2.4 — *L'addition de matrice est associative, commutative et possède un élément neutre (la matrice nulle $O_{np}=(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$).*

Propriété 2.5 — *Soit A et B deux matrices et λ et μ deux scalaires*

- $\lambda.(\mu.A)=(\lambda\times\mu).A=\mu.(\lambda.A)$
- $\lambda.(A+B)=\lambda.A+\lambda.B$
- $(\lambda+\mu).A=\lambda.A+\mu.A$

Ces deux opérations ont les mêmes propriétés que les opérations vectorielles connues : somme de vecteurs et produit d'un vecteur par un scalaire.

En particulier, $0.A=O_{np}$, $-A=(-1).A$. En pratique, le . de cette multiplication est omis.

Propriété 2.6 — *Soit A et B deux matrices et λ un scalaire :*

- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
- ${}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA$

II.3 — Multiplication de matrices

La multiplication matricielle a été définie pour pouvoir mener des calculs avec élégance dans de nombreux contextes, et nous comprendrons progressivement au cours des chapitres à venir, le « pourquoi du comment » de cette définition.

Dans cette partie, q est un entier non nul.

Définition 2.7 — **Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne**

Soit $L\in\mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{q,1}(K)$. Par définition, le produit $L\times C$ est la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ définie par

$$LC=\left(l_{11}c_{11}+l_{12}c_{21}+\cdots+l_{1q}c_{q1}\right)$$

En pratique, on peut présenter les calculs sous la forme

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{q1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} l_{1k} c_{k1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2.8 — Produit de deux matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$. Par définition, le produit $A \times B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la i–ième ligne et à la j–ième colonne est le produit de la i–ième ligne de A par la j–ième colonne de B.

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

En pratique, on peut présenter les calculs sous la même forme que précedemment.

Propriété 2.9 — *Le produit matriciel est associatif : $(AB)C = A(BC)$.*

Dém. On admet ce résultat. □

Le produit matriciel n'est évidemment pas commutatif, puisque BA peut ne pas être défini si AB l'est.

De plus, la notion d'élément neutre est problématique, puisque ce n'est pas une opération interne de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Propriété 2.10 —

1) $\forall A \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall (B,C) \in (\mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}))^2, \quad A(B+C) = AB + AC$
2) $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \forall C \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad (A+B)C = AC + BC$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \quad \lambda(AB) = A(\lambda B)$
4) $\forall A \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$

Écriture matriciel des systèmes d'équations linéaires

Soit (Σ) un système de n équations linéaires à p inconnues et à coefficients dans K

$$(\Sigma)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = (a_{ij})$, la matrice colonne $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et la matrice colonne $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Alors formellement le système (Σ) peut aussi s'écrire $AX = B$. On dit que A est la matrice associée au système (Σ).

Réciproquement, à toute matrice A de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ on peut associer des systèmes de n équations à p inconnues de la forme $AX = B$. Selon le second membre, on obtient des systèmes différents. Le système $AX = O_{n1}$ est le système homogène associé à A.

III — Cas des matrices carrées

La multiplication matricielle est une opération interne de l'ensemble des matrices carrées. Elle n'est pas commutative, comme on peut le voir sur un exemple simple. En revanche, elle admet un élément neutre : la matrice identité I_n.

Propriété 3.1 — *La multiplication de matrice est une opération interne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, associative et admettant un élément neutre (I_n).*

III.1 — Matrices triangulaires, diagonales

La multiplication est également une opération interne de l'ensemble des matrices triangulaires, des matrices diagonales.

Propriété 3.2 — *Soit T et U deux matrices triangulaires supérieures. Alors TU est une matrice triangulaire supérieures.*

Dém. On a en fait

$$TU =$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}u_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & t_{22}u_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & t_{33}u_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn}u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$$

□

Propriété 3.3 — *Soit D et Δ deux matrices diagonales. On a*

$$D\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1\delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2\delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\delta_n \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

III.2 — Puissance de matrice

Définition 3.4 — Puissances de matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Par définition

$$A^k = I_n \times \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

En particulier $A^0 = I_n$.

Cette puissance vérifie la propriété caractéristique de la notation puissance

Propriété 3.5 — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(i,j) \in \mathbb{N}^2$*

$$A^i A^j = A^{i+j} = A^{i+j} = A^i A^j$$

Attention ! De manière générale $(AB)^k \neq A^k B^k$. Par exemple $(AB)^2 = ABAB\ldots$ et c'est tout ! En effet, la non-commutativité du produit matriciel empêche de pouvoir permuter B et A dans l'écriture précédente, et donc « d'amener » tous les A et tête de liste et tous les B à la fin de la liste.

Toutefois les puissances de A sont des matrices qui commutent entre elles, comme on le voit dans le résultat précédent.

Propriété 3.6 — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}^2$,* ${}^t\left(A^k\right) = \left({}^tA^k\right)$.

Propriété 3.7 — *Soit $k \in \mathbb{N}$ et D une matrice diagonale. On a*

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Théorème 3.8 — Binôme de Newton pour les matrices

Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

IV — Matrices inversibles

IV.1 — Définition

Définition 4.1 — Matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique : on l'appelle l'inverse de A et on la note $B = A^{-1}$.

On note l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$.

En effet, si deux matrices B et C vérifient $AB = I_n = BA$ et $AC = I_n = CA$, alors

$$B = BI_n = BAC = (BA)C = I_nC = C \quad \text{donc} \quad B = C$$

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Les matrices inversibles permettent de « simplifier » les calculs. Par exemple, de façon générale $AB = AC$ ne permet pas, avec des matrices, de déduire que $B = C$. Considérez par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Mais ça, c'est parce que A n'est pas inversible ! En effet, si A est inversible et que $AB = AC$, alors $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ (en multipliant à gauche par A^{-1}) et donc $I_nB = I_nC$, soit $B = C$.

La question essentielle maintenant est d'établir un critère permettant de savoir si une matrice est inversible. Il en existe plusieurs, mais aucun n'est vriament « simple ».

IV.2 — Les cas les plus simples

Dans le cas des matrices diagonales, on répondre directement :

Propriété 4.2 — Cas des matrices diagonales

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Propriété 4.3 — Critère de non–inversibilité

Soit M une matrice carrée. S'il existe une matrice non nulle N telle que $MN = O$ ou $NM = O$ alors M n'est pas inversible.

Dém. Par l'absurde : si M est inversible, alors $MN = 0$ implique $M^{-1}MN = 0$ donc $N = 0$ ce qui est exclu par hypothèse. □

Remarquez que N peut être de taille quelconque. On peut ainsi facilement voir que certaines matrices ne sont pas inversibles. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible car } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ non nulle}$$

D'ailleurs toute matrice dont une colonne est proportionnelle à une autre n'est pas inversible (exercice : prouvez-le).

Propriété 4.4 — Produit de deux matrices inversibles

Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n.

Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dém. En effet, si on pose $C = B^{-1}A^{-1}$ alors on constate que

$$(AB)C = ABB^{-1}A^{-1} = I_n \qquad \text{et} \qquad C(AB)C = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$$

ce qui prouve le résultat. □

Propriété 4.5 — Transposée d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible d'ordre n. Alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Dém. idem que la précédente. □

IV.3 — Méthode pratique pour déterminer si une matrice est inversible et pour trouver son inverse.

Le théorème suivant est très important pour la pratique des calculs.

Théorème 4.6 — *La matrice carrée A est inversible si et seulement si pour toute matrice B, le système $AX = B$ est un système de Cramer.*

Dém. D'abord si A est inversible, alors le système $AX = B$ a pour unique solution $X = A^{-1}B$. Donc il est bien de Cramer.

Étudions la réciproque. Pour cela, on fabrique l'inverse de A à partir des matrices colonnes C_i solutions des systèmes $AX = E_i$. □

Corollaire 4.7 — Cas des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Dém. On a vu dans le cours sur les systèmes d'équations linéaires qu'un système triangulaires est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. □