

Le formalisme mathématique

BCPST I — 27 février 2017

Les mathématiques modernes forment une science essentiellement formelle.

Tout d'abord, tout texte mathématique peut être entièrement formalisé dans un langage conventionnel, constitué d'un nombre déterminé de symboles, utilisé selon des règles clairement énoncées. La vérification syntaxique d'un texte formalisé est alors une opération purement mécanique.

Toutefois, pour des énoncés courants, une telle vérification est extrêmement fastidieuse. On se permet donc d'utiliser le langage courant, un certain nombre des symboles abrégiateurs (qui représentent une opération complexe), des méthodes de calcul et de raisonnement éprouvées (intégration par parties, raisonnement par l'absurde, par récurrence, etc.) ainsi que des objets courants sans chercher nécessairement à en approfondir la définition (entier, opérations usuelles, etc.)

Il est pourtant essentiel d'avoir quelques notions de ce formalisme, qui constitue les fondements solides de la science mathématique.

I — Phrases mathématiques

I.1 — Énoncés

On définit tout d'abord un certain nombre de *symboles* :

- des **variables**, en nombre infini comme x , y , z , etc.
- des **constantes** comme 0, 1, etc.
- des **prédicats** qui rendent compte des relations entre les variables. Par exemple « est plus petit que » qui est noté \leq , « addition », etc.

Syntaxe Les prédicats ont leur propre syntaxe : des règles concernant les objets proprement mathématiques (toute parenthèse ouverte doit être fermée, le signe \times doit être précédé et suivi d'un symbole, etc.), ainsi que des règles propres à la définition des objets.

Exemple

- « $\sqrt{2} =$ » n'est pas syntaxiquement correcte ;
- « $x = \ln(-2)$ » non plus (la syntaxe du symbole \ln n'est pas respectée) ;

- « $1 + 1 = 1$ » est syntaxiquement correct, quoique fausse ;
- « 2 est un entier pair » ;
- « Cette phrase est écrite avec une faute d'orthographe » (syntaxiquement correct, mais faux — j'espère !).

Pour bien travailler on doit donc penser à vérifier la syntaxe : utiliser une fonction dans son domaine de définition, vérifier la convergence d'une suite avant d'écrire le symbole \lim , etc.

Beaucoup d'erreurs d'élève sont en réalité des erreurs de syntaxe. Les erreurs de raisonnement sont souvent plus subtiles et plus difficiles à expliquer.

Exercice 1 En faisant quelques calculs simples, expliquez pourquoi il est syntaxiquement incorrect :

1. de définir un ordre parmi les nombres complexes semblable à celui qui est défini sur les réels ;
2. d'écrire $\sqrt{-1} = i$;
3. de définir la racine carrée d'un nombre complexe ;
4. de parler du logarithme népérien d'un nombre complexe.

Solution — 1. Si, par exemple, $i \geq 0$, alors $i \times i \geq 0$, donc $-1 \geq 0$.

2. $2 = \sqrt{4} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{4} = i \times i \times \sqrt{4} = -2$.

3. $\sqrt{i} \times \sqrt{i} = \sqrt{-1}$, mais cette dernière écriture ne peut être syntaxiquement correcte.

4. Par exemple $(e^{i\pi/2})^4 = 1$, donc on aurait $4 \ln(e^{i\pi/2}) = \ln(1) = 0$. Or si logarithme est toujours la bijection réciproque de l'exponentielle, on aurait donc $0 = i\pi/2$.

I.2 — Définition

Dans cette perspective formelle, une *définition* est une manière de résumer en un mot d'une propriété plus ou moins complexe.

Un exemple typique de définition est

Définition 1.1 — Fonction croissante

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans \mathbb{R} .

On dit que f est croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Il faut bien comprendre que

- l'expression française « f est croissante sur I » est un raccourci pour la formule mathématique précédente. C'est cette formule qui a un véritable intérêt dans les raisonnements !

Ainsi, une excellente habitude au début d'une question consiste à écrire les définitions en langage mathématique.

- l'intervalle I est ici essentiel ! Il n'est pas équivalent de dire qu'une fonction est croissante sur \mathbb{R} , sur \mathbb{R}_+ ou sur $[0 ; 1]$. Il arrive qu'on parle simplement d'une « fonction croissante », mais c'est une facilité de langage à éviter.
- Cette définition peut très bien ne rien définir ! En général, une définition est assortie d'un exemple explicite d'objet vérifiant la propriété, ou bien d'une preuve de l'existence d'un tel objet.

On parle de *caractérisation* lorsqu'on énonce une propriété qui est équivalente à la définition. Au fond cette propriété aurait pu être prise comme définition, c'est une « redéfinition ». Mais parfois on ajoute un petit quelque chose...

Théorème 1.2 — Caractérisation des fonctions dérivables croissantes

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R} .

f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$.

I.3 — Connecteurs logiques

Vous devez connaître un certain nombre de symboles qui permettent de composer entre elle des propositions pour en fabriquer de nouvelles.

Notez bien que nous n'avons pas encore parlé de valeur de vérité : ainsi, parmi les exemples suivants, certains paraîtront erronés alors qu'ils sont simplement « FAUX ».

Symbole	Signification	Exemple
non	négation	non (5 est pair)
ou		$x = 3$ ou $x \leq 2$
et		n est entier et n est plus petit que 0
\implies	implique	$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1$
\iff	équivalent	$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = 1$

Le symbole d'égalité est aussi un connecteur, mais pas un connecteur logique. Il s'utilise dans les expressions qui ont une valeur numérique : elle affirme que les expressions, quoiqu'apparemment différentes, ont la même valeur.

II — Valeurs de vérités

II.1 — Assertion, proposition,

Les notions de « Vrai » et « Faux » sont purement conventionnels. On attribue tout d'abord à un petit nombre de propositions, nommées *axiomes*, la valeur de vérité « Vrai ».

Ces axiomes doivent vérifier un certain nombre de propriétés « de bon sens ». Par exemple, ils ne doivent pas se contredire entre eux, ils doivent être indépendants les uns des autres (c'est-à-dire qu'on ne peut pas déduire un axiome à partir des autres), etc

Par la suite, la valeur de vérité des autres phrases mathématiques se déduit des axiomes à l'aide de règles de calcul logique que nous allons voir.

Définition 2.1 — Une *assertion* ou *proposition* est une phrase syntaxiquement correcte et à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : « Vrai » (V) ou « Faux » (F).

Il existe donc effectivement plusieurs « mathématiques » selon les axiomes de base qui sont utilisés. La théorie mathématique courante porte le nom de « théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel ». Elle se caractérise par l'utilisation intensive de la notion d'ensembles, ainsi que par un petit nombre d'axiomes énoncés par les deux mathématiciens Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e. On leur ajoute souvent un axiome supplémentaire, l'axiome du choix, encore que les discussions sur la nécessité d'ajouter cet axiome restent vives.

Les termes « théorèmes », « corollaires », « propositions », « propriétés », « lemmes » désignent tous des propositions établies comme vraies. L'usage veut que les résultats les plus importants soient dénommés « théorèmes », que les « corollaires » soient des conséquences immédiates d'un théorème. Les « propriétés » sont en général des théorèmes qui énoncent des propriétés algébriques. Quand aux « lemmes », ce sont des résultats intermédiaires dans une démonstration un peu étendue.

II.2 — Connecteurs logiques

En partant de plusieurs propositions P , Q , etc. il est possible de construire de nouvelles propositions : non P , P ou Q , etc. Cette construction permet d'établir la véracité du résultat en fonction des valeurs de vérités des propositions de départ.

Négation

Définition 2.2 — Soit P une proposition logique. La proposition ($\text{non}P$) est une proposition syntaxiquement correcte, qui a par définition la valeur de vérité

P	$\text{non } P$
V	F
F	V

« et », « ou »

À l'intérieur d'un raisonnement, les connecteurs logiques permettent d'envisager différentes situations, selon la véracité des assertions qu'ils relient. Ils sont définis de façon à correspondre aux notions usuelles « et » et « ou ».

Définition 2.3 — Soit P et Q deux propositions logiques. Les propositions ($P \text{ et } Q$) et ($P \text{ ou } Q$) sont syntaxiquement correctes. Elles ont par définition les valeurs de vérité

P	Q	$P \text{ et } Q$	P	Q	$P \text{ ou } Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

Le connecteur « ou » correspond à un *ou* inclusif, c'est-à-dire qu'il suffit qu'un des deux assertions soit vraie. Dans le langage courant, le *ou* est souvent exclusif : quand on vous propose « fromage ou dessert », vous ne pouvez peut-être pas prendre les deux...

Les formules de De Morgan¹ explicitent le lien entre non , et et ou .

Théorème 2.4 — Formules de De Morgan

- $\text{non}(P \text{ et } Q)$ à la même valeur de vérité que $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$;
- $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ à la même valeur de vérité que $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$;

Dém. On dresse les tables des vérités des différentes propositions. □

1. Auguste De Morgan (27 juin 1806 à Madurai (Tamil Nadu) - 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il fût un excellent professeur, et le fondateur avec Boole de la logique moderne.

Exemple

- La négation de « la voiture est bleue ou c'est une Renault » et celle de « mon animal de compagnie est un chien ou un chat ».
- Donner la négation, pour $x \in \mathbb{R}$, de $3 \leq x \leq 7$.
- Donner la négation, pour $x \in \mathbb{R}$, de $3 \leq x \leq -7$.
- Donner la négation, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de

Théorème 2.5 — Commutativité, associativité, distributivité

Soit P, Q et R trois propositions.

- 1) associativité de *et* : $P \text{ et } (Q \text{ et } R) = (P \text{ et } Q) \text{ et } R$ noté simplement $P \text{ et } Q \text{ et } R$;
- 2) associativité de *ou* : $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) = (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ noté simplement $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$;
- 3) distributivité de *et* sur *ou* : $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) = (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$;
- 4) distributivité de *ou* sur *et* : $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) = (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.

Implication

La plupart des théorèmes mathématiques s'écrivent sous la forme d'une implication : « Si (tels et tels objets ont telles et telles propriétés) alors (Q est vrai) ».

Exemple Dans « Soit a et b deux réels. Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$. » il y a trois hypothèses ! (Lesquelles ?)

En mathématiques, l'assertion $P \implies Q$ se définit à partir des connecteurs précédents.

Définition 2.6 —

- Soit P et Q deux propositions. Par définition l'assertion « $P \implies Q$ » (qui se lit « P implique Q ») est l'assertion « (non P) ou Q »
- Par définition l'assertion « $P \iff Q$ » (qui se lit « P est équivalente à Q ») est l'assertion « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ».

Voyons leurs tables de vérité :

P	Q	$P \implies Q$	P	Q	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

Exemple Vous cherchez à déterminer l'espèce d'un arbre. Pour cela, vous regardez s'il a des fruits. Vous en trouvez un : c'est une pomme. L'arbre est donc un pommier, suivant l'implication « Il y a une pomme sur l'arbre, *donc* c'est un pommier ».

Il est impossible que l'arbre soit autre chose qu'un pommier si on trouve une pomme sur une de ces branches, ce qui explique la seconde ligne du tableau.

Si nous ne trouvons pas de pommes dans l'arbre, devons nous en déduire que notre implication est fautive ? Bien sûr que non. L'arbre peut-être un pommier ou non, bien que nous ne puissions pas prévoir s'il l'est ou pas. Ainsi les deux dernières lignes du tableau correspondent bien au sens commun, quoiqu'on ait jamais besoin d'y songer.

Au cours d'une démonstration il est assez fréquent de rencontrer plusieurs niveaux d'implication.

Démontrons par exemple la proposition suivante :

(A) L'équation $x^3 + 2x - 3 = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ .

Une manière de procéder consiste à supposer connues deux solutions de l'équation puis à montrer qu'elles sont égales. Ainsi l'énoncé (A) est équivalent à l'énoncé (B) suivant

(B) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+, \quad x^3 + 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + 2y - 3 = 0 \implies x = y$

Vous êtes bien d'accord que si nous démontrons l'énoncé (B), alors nous avons démontré l'énoncé (A) ? Or (B) est une implication. Pour le démontrer, nous allons supposer vrai le côté gauche de l'implication et montrer que le côté droit est vrai.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + 2y - 3 = 0 &\implies x^3 + 2x - 3 = y^3 + 2y - 3 \\ &\implies x^3 - y^3 = 2(y - x) \\ &\implies (x - y)(x^2 + xy + y^2) = -2(x - y) \\ &\hspace{15em} \text{voir ??} \\ &\implies x - y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + xy + y^2 = -2 \end{aligned}$$

Or la seconde proposition est fautive. La première est donc vraie, puisque l'ensemble doit être vrai. Ainsi

$$x^3 + 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + 2y - 3 = 0 \implies x = y$$

Résumons nous : pour démontrer le résultat (A), nous avons remarqué qu'il était équivalent à l'implication (B), nous avons ensuite démontré l'implication (B).

En apprenant à suivre méthodiquement les implications et les équivalences vous serez capables de comprendre les démonstrations les plus compliquées ! Retenez que vous pouvez immédiatement remplacer une proposition par une proposition logiquement équivalente, et retenez surtout que cette petite gymnastique est très utile !

Exercice 2 Quelle est la valeur de vérité de des propositions suivantes ?

1. 2 est pair \implies 4 est pair ;
2. 2 est pair \implies 3 est pair ;
3. 2 est impair \implies 3 est pair ;
4. $4 > 1 \iff 4^2 > 1$;
5. le ciel est bleu $\iff 2 + 2 = 4$.

Remarque I.0 Remarquez que « faux implique n'importe quoi » et que « faux \iff faux »...

III — Quantificateurs

III.1 — Prédicat

Définition 3.1 — *Un **prédicat** est une assertion dans laquelle figure un symbole dont la signification peut être variable.*

La valeur de vérité du prédicat dépend donc de la signification du symbole.

Exemple

- « A est pair » est un prédicat dépendant du symbole A . Toutefois pour que cette assertion soit syntaxiquement correcte, il faut que A soit un objet pour lequel la notion de « pair » est définie : un entier ou une fonction définie sur \mathbb{R} par exemple. Lorsqu'on remplace x par une valeur (entière) on obtient une assertion : pour $x = 2$ l'assertion « 2 est pair » est vraie, pour $x = 3$ elle ne l'est pas ;
- « $x^2 > 1$ » est un prédicat sur \mathbb{R} , mais pas sur \mathbb{C} (il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C}). Si on remplace x par -2 on obtient une assertion, mais si on remplace x par $1 + i$ on obtient un énoncé qui n'est pas valide syntaxiquement ;
- $xy = 1$ est un prédicat à deux variables sur \mathbb{C}^2 .

Les prédicats permettent d'énoncer des règles générales, dont la portée dépasse les quelques cas particuliers que nous pouvons envisager « humainement ». C'est la méthode de généralisation (ou d'abstraction) par excellence.

Les quantificateurs servent à « fermer » un prédicat pour en faire une proposition. Par exemple « $(x + 1)^2 - x^2$ est pair » est un prédicat que l'on peut fermer par un quantificateur de la façon suivante : « $\forall x \in \mathbb{N}, (x + 1)^2 - x^2 \text{ est pair}$ ».

Ce fermeture permet de transformer le prédicat en une assertion dont on va ensuite établir la valeur de vérité.

III.2 — \forall, \exists

Soit $P(x)$ un prédicat à une variable x . Ce prédicat a bien un sens lorsque x varie dans un ensemble donné E . Nous pouvons construire trois nouvelles assertions :

- « $\forall x \in E, P(x)$ » Cette assertion est vraie dans le cas où l'assertion $P(x)$ est vraie pour toute les valeurs de la variable x prises dans l'ensemble E ;

Elle est formellement équivalente à « $x \in E \implies P(x)$ ».

On la démontre donc en faisant l'hypothèse $x \in E$ et en démontrant alors $P(x)$.

- « $\exists x \in E P(x)$ » Cette assertion est vraie dans le cas où l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins une valeur de la variable x .

Elle est définie comme la négation de « $\forall x \in E \text{ non } P(x)$ », soit non $(x \in E \implies \text{non } P(x))$.

La démonstration de cette assertion est souvent plus difficile, car elle suppose *a priori* d'exhiber l'élément x . La plupart du temps, il faut trouver une astuce pour s'assurer l'existence de x sans avoir à le calculer. Le raisonnement par l'absurde est ici d'une grande aide (exercice : comprendre pourquoi).

- « $\exists! x \in E P(x)$ » Cette assertion est vraie dans le cas où l'assertion $P(x)$ est vraie pour une unique valeur de la variable x .

Elle est formellement équivalente à « $(\exists x \in E P(x))$ et $(\forall (x, y) \in E, [(P(x) \text{ et } P(y)) \implies x = y])$.

Il y a ici deux étapes de démonstration : d'abord prouver l'*existence* de x et ensuite son *unicité*.

Notez que, bien que la valeur de vérité $P(x)$ dépendent de la valeur de x , la valeur de vérité de $\forall x \in E, P(x)$ ne dépend pas de x . D'ailleurs, on peut changer le symbole x dans cette dernière phrase sans en modifier sa valeur de vérité, son sens.

Exercice 3 Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{N}^*, x^2 > 1$;
3. $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 > 1$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1$;
5. $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 > 1$.

Exercice 4 Soit a et b deux réels et f une fonction dérivable de $]a ; b[$ dans \mathbb{R} . Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f est croissante sur $]a ; b[$;
2. $f' > 0$.

III.3 — Négation des quantificateurs

Proposition 3.2 —

- 1) La négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad (\text{non } P)(x)$ ».
- 2) La négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad (\text{non } P)(x)$ ».

On parle dans le premier cas de **contre-exemple**. Par exemple : « tous les nombres impairs sont premiers » est nié par le contre-exemple « le nombre impair 9 n'est pas premier ».

Exercice 5 Quelle est la négation des phrases :

- $x < y$;
- la fonction f définie sur \mathbb{R} est croissante ;
- la fonction f définie sur \mathbb{R} est positive ?

Puisque « faux implique n'importe quoi », on a « $\forall x \in \emptyset, P(x)$ » toujours vraie, quelque soit le prédicat P . Par négation, « $\exists x \in \emptyset, P(x)$ » est donc toujours fausse. C'est pour cela qu'on prend souvent soin de ne pas faire varier x dans l'ensemble vide.

III.4 — L'ordre des quantificateurs

Certaines assertions dépendent de deux variables. Dans ce cas, chaque variable peut être liée par un quantificateur. L'ordre des quantificateurs est alors important. Pensez à la phrase : « pour chaque porte, il existe une clé qui ouvre cette porte » et à « il existe une clé qui ouvre toutes les portes ».

Exemple Considérons le prédicat $y \leq x$ à deux variables réelles x et y . On peut construire plusieurs assertions à partir de ce prédicat :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x$;
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x$.

La première est vraie alors que la seconde est fausse (le démontrer).

Dans le premier cas, l'existence de y est toujours assurée, mais x étant donnée, la valeur de y peut changer.

Dans le second cas, la valeur de y ne peut pas changer parmi tous les x .

Exemple Est-ce que les deux phrases suivantes sont vraies ?

- $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y \leq x$;
- $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y \leq x$.

Notons enfin que des quantificateurs \forall utilisés ensemble, ou deux \exists utilisés ensemble peuvent être permutés. Exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^4 \geq 0$;
- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$.

Exercice 6 Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$;
2. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$;
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, xy = x$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} x = y + z$;
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} x = y + z$;
6. $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} x = y + z$.

IV — Différents types de raisonnement mathématique

Nous voyons maintenant les principales méthodes permettant d'établir la véracité d'une proposition.

IV.1 — Raisonnement inductif

Il s'agit de partir d'une théorie et de parvenir au résultat par une série d'implications logiques.

La « théorie » en question est l'ensemble des résultats du cours, ainsi que les résultats précédemment établis dans l'exercice.

Exemple À partir de la mini-théorie

- $\forall x \in \mathbb{R}, x + x = 2 \times x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq y$;

démontrons le résultat suivant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 2 \times x \geq x$$

La démonstration est très simple, mais il est intéressant d'en comprendre la structure. La mini-théorie fournit deux « théorèmes ». Ceux-ci sont de la forme archi-courante « Si x vérifie telle propriété alors x vérifie telle autre propriété ». Il s'agit donc d'une implication logique « $P \implies Q$ ».

Le raisonnement à faire consiste donc à supposer P vraie, à utiliser le théorème « $P \implies Q$ » et à en déduire que Q est vraie. Puis on continue le raisonnement à l'aide des autres théorèmes.

Ici, supposons donc que x est un réel positif. Appliquons le second théorème dans le cas particulier $y = x$ (ce qui est possible, puisque x est aussi un réel). On en déduit que « $x + x \geq x$ ».

On peut aussi appliquer le premier théorème à $x : x + x = 2 \times x$.

En conclusion « $2 \times x \geq x$ ».

Exemple Quand on veut démontrer une proposition du genre $\forall x \in E, P(x)$, on mène un raisonnement inductif en partant de la proposition $x \in E$ et en cherchant à démontrer $P(x)$.

Par exemple « Montrer que $A \subset B$. » En fait, on peut réécrire cette question de la manière suivante : « Montrer que $\forall x \in A \quad x \in B$ ». Pour répondre à la question, on doit donc prendre un élément de A et montrer qu'il est dans B .

Exercice 7 Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. $A \subset B$;

3. $E = A \cup B$;

2. $A \subset \bar{B}$;

4. A et B sont disjoints.

IV.2 — Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une méthode de raisonnement assez spectaculaire. Elle consiste à démontrer une implication en supposant l'hypothèse vraie, la conclusion fautive puis à raisonner jusqu'à aboutir à une proposition fautive.

En termes logiques, au lieu de démontrer que « $P \implies Q$ » est vraie, on démontre que sa négation est fautive. Je vous rappelle que la négation de « $P \implies Q$ » est précisément « P et (non Q) ».

Exemple — Irrationalité de $\sqrt{2}$

– Montrons la proposition suivante : soit $p \in \mathbb{N}$, si p^2 est pair alors p est pair.

Raisonnons par l'absurde : supposons que p^2 est pair et que p est impair. Comme p est impair, il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$. Alors $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et nous constatons que p^2 est impair. Il y a une contradiction, c'est donc que p est pair.

– Démontrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction irréductible : $\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et p et q n'ont pas de diviseur commun.

Or $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc que $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc, d'après l'exemple précédent, p est pair. Donc il existe un entier k tel que $p = 2k$. Ainsi $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$. On en déduit que q^2 est pair, donc q est pair.

Voilà la contradiction : p et q sont tous deux pairs, mais ils ne doivent pas avoir de diviseur commun.

IV.3 — Disjonction des cas

On raisonne par disjonction des cas lorsqu'on doit faire des hypothèses supplémentaires par rapport à celles de l'énoncé. Il est indispensable d'étudier alors l'hypothèse contraire, ou d'étudier un ensemble d'hypothèses $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ telles que l'une d'entre elles au moins soit vérifiée.

Exemple Démontrer que pour tout réel x il existe un réel y tel que $xy + x^2 + y = 1$.

On peut commencer un calcul simple

$$xy + x^2 + y = 1 \implies y(x + 1) = 1 - x^2$$

Mais maintenant, on veut pouvoir diviser par $x + 1$, ce qui n'est possible que si x est différent de -1 . Le raisonnement par disjonction des cas est tout à fait adapté.

Si $x \neq -1$, alors on trouve $y = (1 - x^2)/(1 + x) = 1 - x$. La propriété est donc vraie, puisque y existe (et d'ailleurs, il est unique).

Si $x = -1$, alors l'équation devient $0 = 0$, qui est vraie quelque soit y . La propriété est vraie : toutes les valeurs réelles de y conviennent.

En conclusion, quelque soit la valeur de x , il existe un réel y tel que etc.

Contraposée, négation d'une implication

– Dans l'implication $P \implies Q$, P est la proposition **suffisante** et Q la proposition **nécessaire**.

Penser à « l'homme vit sur la planète Terre, donc il y a de l'oxygène dans l'atmosphère de la Terre ».

– L'**implication réciproque** de « $P \implies Q$ » est « $Q \implies P$ ».

L'erreur de raisonnement la plus communément partagée par l'humanité consiste à confondre une proposition et sa réciproque. Exemple amusant : « Si je suis nul en math alors j'aurai une mauvaise note ». Exemple moins amusant : « Un ennemi est un étranger ».

Théorème 4.1 — Contraposée

La *contraposée* de l'implication « $P \implies Q$ » est « non $Q \implies$ non P ».

Deux contraposées ont la même valeur de vérité.

Dém. En dressant leurs tables de vérité. □

La contraposée de « Il pleut donc je suis mouillé(e) » est « Je ne suis pas mouillé(e) donc il ne pleut pas ». La contraposée est un bon moyen de démontrer la négation d'une proposition, comme on le verra par la suite.

Proposition 4.2 — La négation de $P \implies Q$ est $(\text{non } P)$ et Q .

Dém. En utilisant les formules de De Morgan □

Exercice 8 Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donner la réciproque et la contraposée des propositions suivantes. Dans chaque cas, donner la valeur de vérité.

1. f est constante $\implies f$ est croissante ;
2. f' est positive $\implies f$ est croissante ;
3. $f' = 0 \implies f$ est constante ;
4. f admet un maximum en 1 $\implies f'(1) = 0$.

IV.4 — Raisonnement par récurrence

Le principe de base du raisonnement par récurrence est souvent mal compris, alors qu'il est en fait très simple. Soit à démontrer un prédicat $H(n)$ dépendant d'une variable entière n , variant dans \mathbb{N} (ou, *mutatis mutandis* dans \mathbb{N}^* , $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, etc.). Il s'agit en fait de démontrer une infinité de proposition

$$H(0) \quad H(1) \quad H(2) \quad \cdots \quad H(n-1) \quad H(n) \quad H(n+1) \quad \cdots$$

La méthode la plus naturelle consiste à fixer n dans \mathbb{N} et à démontrer directement $H(n)$.

Exemple Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour cela on écrit la somme dans les deux sens, et on somme :

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ S_n = n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline \text{par somme} \quad 2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \\ \text{donc} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Lorsque cette méthode semble trop difficile à mettre en œuvre, on peut essayer de se simplifier la vie. Pour cela, on va démontrer $H(n)$ en faisant une hypothèse

supplémentaire, à savoir que $H(n-1)$ est vraie. Si on y parvient, alors on aura démontré la suite d'implications

$$H(0) \implies H(1) \implies H(2) \implies \dots \implies H(n-1) \implies H(n) \implies H(n+1) \implies \dots$$

Cela signifie-t-il que toutes les propositions sont vraies ? Évidemment non, car il nous manque une information : que la première proposition de la chaîne, à savoir $H(0)$ est aussi vraie. En résumé,

Théorème 4.3 — Principe de récurrence simple

Soit une assertion $H(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

- Si $H(0)$ est vraie ;
- si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a « $H(n) \implies H(n+1)$ » vraie ;
- alors « $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ » est vraie.

On peut bien sûr commencer à un rang autre que 0.

Exemple Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$u_0 = 1/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{n}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

Récurrence à deux pas On a parfois besoin d'une version plus puissante de la récurrence

Théorème 4.4 — Soit une assertion $H(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

- Si $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies ;
- si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, « $(H(n-1) \text{ et } H(n)) \implies H(n+1)$ » ;
- alors « $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ » est vraie.

Ici on établit une chaîne d'implications un peu plus compliquée, et c'est pour cela qu'il est nécessaire de démontrer aussi $H(1)$. Sans cela, la seconde hypothèse ne suffirait pas à démontrer $H(1)$.

Exemple Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n$.

Récurrence forte Voici la version la plus puissante de la récurrence, que j'utiliserai parfois dans le cours.

Théorème 4.5 — Principe de récurrence forte

Soit une assertion $H(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

- Si $H(0)$ est vraie ;
- si pour tout k entre 0 et n $H(k)$ est vraie alors $H(n + 1)$ est vraie ;
- alors « $\forall n \in \mathbb{N} \quad H(n)$ » est vraie.

Une déduction est une suite de formules telle que chaque formule A apparaissant dans cette suite vérifie l'une des conditions suivantes :

- A est l'un des théorèmes déjà démontrés (ou un des axiomes) dans lequel les variables sont remplacées par des formules ;
- il existe deux formules précédant A qui sont de la forme $B \implies A$ et B ; on dit alors que A est obtenue par *modus ponens* (déduction logique) entre ces deux formules. On représente une déduction en écrivant les formules ligne par ligne et en adjoignant un commentaire à chaque ligne pour expliquer comment la formule correspondante a été obtenue.