

LIMITES D'UNE FONCTION — CONTINUITÉ PONCTUELLE

BCPST I, 26/12/2017
I — PARTIES DE \mathbb{R} ET ORDRE

I.1 — INTERVALLES

DÉFINITION I.1 — INTERVALLE DE \mathbb{R}

Un **intervalle** de \mathbb{R} est un ensemble d'une des formes suivantes (a et b étant deux réels tels que $a \leq b$)

$$\begin{aligned} & \emptyset, \mathbb{R}, \{a\}, \\ &]a; b[,]a; b], [a; b[, [a; b], \\ &]a; +\infty[, [a; +\infty[,]-\infty; a[,]-\infty; a] \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ I.2 — Un intervalle I de \mathbb{R} vérifie la propriété de continuité

$$\forall (\alpha, \beta) \in I^2, \quad \alpha < x < \beta \implies x \in I$$

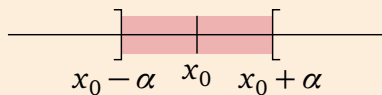
DÉM. En énumérant les différentes formes d'intervalles. □

DÉFINITION I.3 — SEGMENT DE \mathbb{R}

Un **segment** de \mathbb{R} est un intervalle $[a; b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$.

DÉFINITION I.4 — VOISINAGE

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un **voisinage de x_0** est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.



Un **voisinage de $+\infty$** est un intervalle ouvert de la forme $]a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.



II — LIMITES D'UNE FONCTION EN UN POINT

NOTATIONS DU CHAPITRE — Dans tout ce chapitre, \mathcal{D} est un **domaine** de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de \mathbb{R} .

Typiquement : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

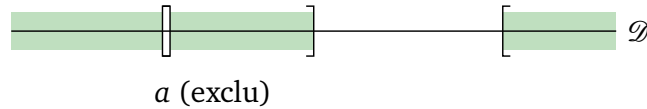


FIGURE I.1 — Un exemple de domaine de définition

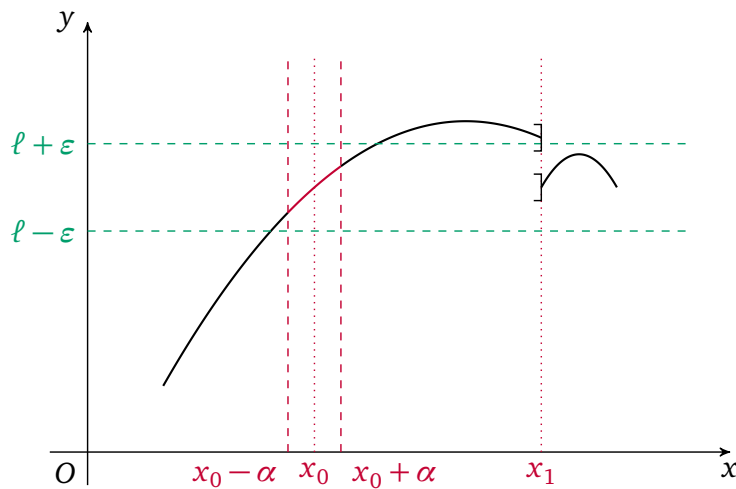
II.1 — LIMITES FINIES

DÉFINITION 2.2 — LIMITE FINIE EN UN POINT

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} .

La fonction f **tend vers** ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



La fonction représentée ci-dessus admet une limite en x_0 . Elle n'admet pas de limite en x_1 .

REMARQUE I.1

- On demande à x d'être dans $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$ afin d'une part que f soit définie en x et d'autre part que x soit dans un voisinage de x_0 .

- On peut montrer que les inégalités dans la définition précédente peuvent être larges ou strictes : la notion définie est la même.

PROPOSITION 2.3 — UNICITÉ DE LA LIMITE

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} . Si f tend vers ℓ en x_0 , alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

DÉM. Soit ℓ et ℓ' deux réels vérifiant

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \\ x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\quad \implies \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha'; x_0 + \alpha'[\quad \implies \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons ε quelconque dans \mathbb{R}_+^* et $\alpha'' = \inf(\alpha, \alpha')$. Prenons alors x quelconque dans $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha''; x_0 + \alpha''[$. Comme

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon \\ |\ell - \ell'| &= |\ell + f(x) - f(x) - \ell'| \\ &< |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon \quad \text{avec l'inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\ell = \ell'$. □

Notation On parle de **la limite de f en x_0** et on note indifféremment $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

EXEMPLE On peut démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$: on prend $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ dans la définition de la limite.

THÉORÈME & DÉFINITION 2.5 — CONTINUITÉ PONCTUELLE

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point de \mathcal{D} . Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que **f est continue en x_0** .

DÉM. Revenons à la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \\ x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\quad \implies \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, alors on peut toujours prendre $x = x_0$ dans la seconde partie de la formule. On ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\ell = f(x_0)$. □

La différence entre la notion de limite en x_0 et la notion de continuité en x_0 est qu'une fonction continue en x_0 doit être *définie* en x_0 .

EXEMPLE La plupart des fonctions usuelles sont réputées continues sur leur domaine de définition.

II.2 — LIMITES INFINIES – LIMITE EN L'INFINI

DÉFINITION 2.7 — LIMITES INFINIES EN UN POINT FINI

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} .

La fonction f **tend vers $+\infty$ en x_0** si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad f(x) > M.$$

La fonction f **tend vers $-\infty$ en x_0** si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x_0} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$. Dans ce cas la courbe représentative de f présente une **asymptote verticale en x_0** .

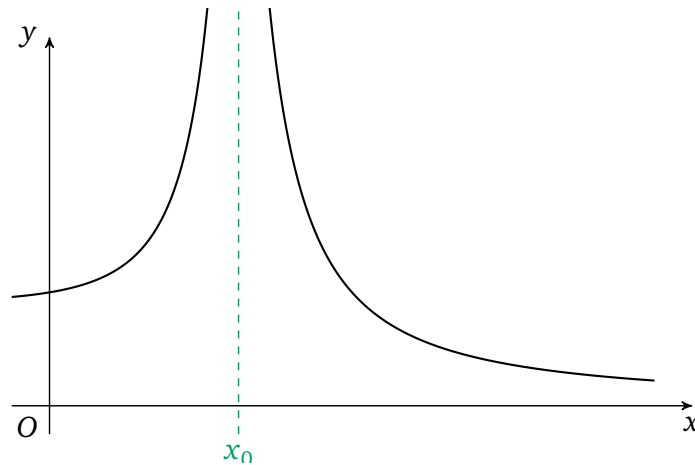


FIGURE I.2 — Asymptote verticale $x = x_0$.

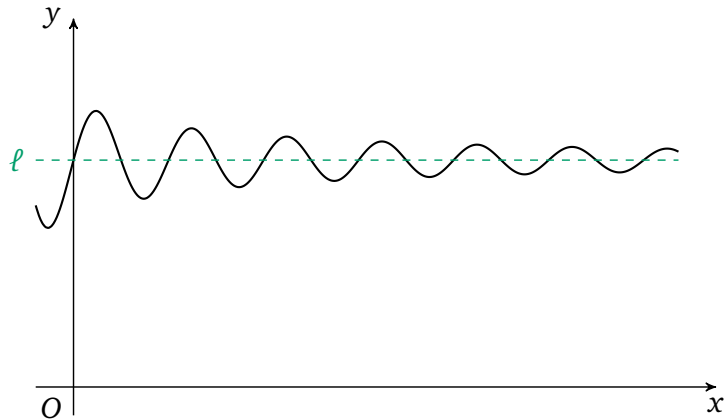
DÉFINITION 2.8 — LIMITE FINIE EN $+\infty$

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f **tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \quad x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une **asymptote horizontale en $+\infty$** .

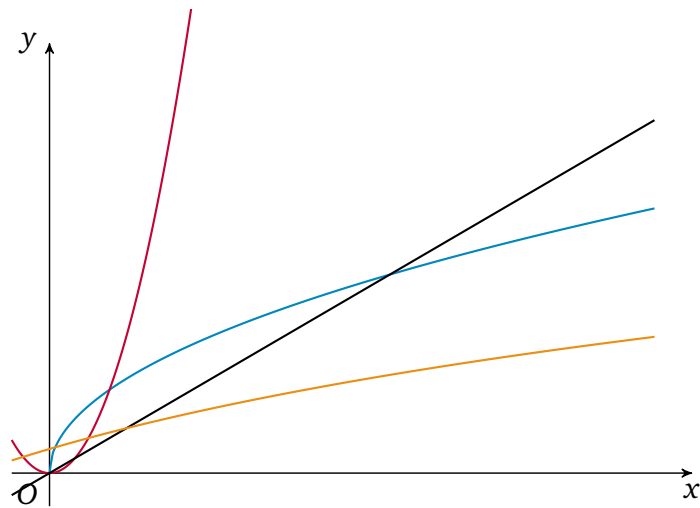
FIGURE I.3 — Asymptote horizontale $y = \ell$ **DÉFINITION 2.9 — LIMITE INFINIE EN $+\infty$**

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f **tend vers $+\infty$ en $+\infty$** si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 \quad x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies f(x) > M.$$

On définit de même les limites en $-\infty$. On prouve qu'il y a également unicité de la limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

FIGURE I.4 — Différents comportements possibles en $+\infty$

APPLICATION I — LIMITE DE \ln EN $+\infty$

Voici la démonstration d'un résultat que nous avons vu dans la partie sur le logarithme : $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout réel x plus grand que $3^{\lfloor A \rfloor + 1}$, $\ln x > (\lfloor A \rfloor + 1) \ln 3 > \ln 3 \times A > A$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad x > M \implies \ln(x) > A$$

DÉFINITION 2.10 — LIMITES PAR VALEURS SUPÉRIEURES, INFÉRIEURES

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

La fonction f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geq \ell$ sur un voisinage de x_0 . On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^+$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \leq \ell$ sur un voisinage de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^-$.

II.3 — LIMITE À GAUCHE, À DROITE

DÉFINITION 2.11 — LIMITE À GAUCHE EN x_0

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne supérieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]-\infty ; x_0 [$ admet une limite en x_0 .

Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.

DÉFINITION 2.12 — LIMITE À DROITE EN x_0

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne inférieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 ; +\infty [$ admet une limite en x_0 . Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.

ℓ .

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

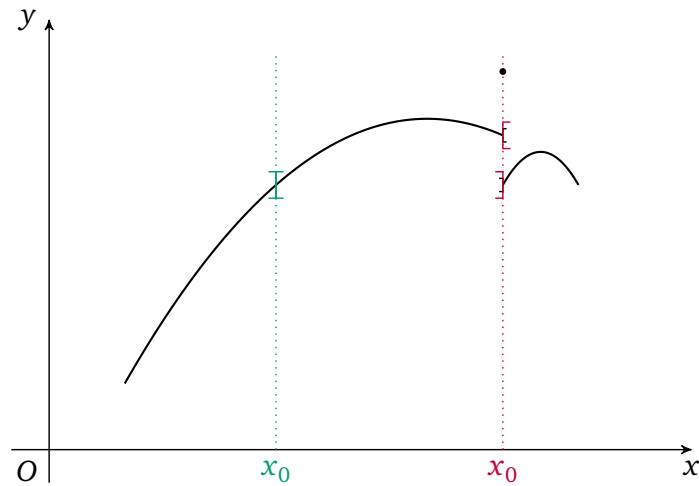
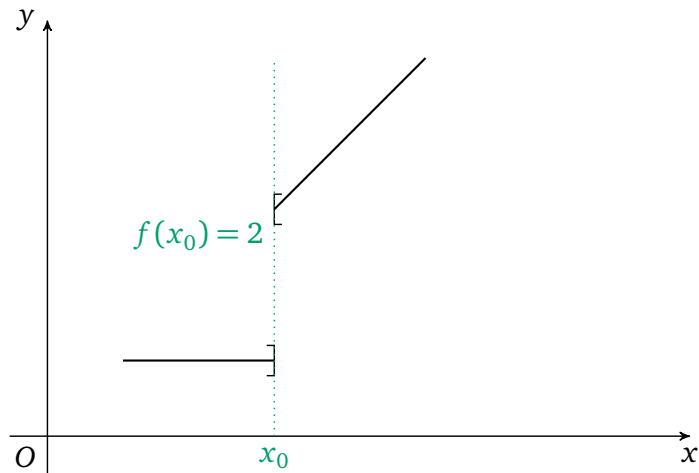


FIGURE I.5 — Limites à gauche et à droite

EXEMPLE La fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ admet 1 comme limite à gauche en 2 et 2 comme limite à droite en $x_0 = 2$.

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$


Remarquez que la limite à gauche est différente de la valeur de la fonction en 2. En effet, pour étudier la limite à gauche, on prend la restriction de f à $[0 ; 2[$, ce qui permet d'obtenir une limite différente de $f(2)$.

Important! Aux bornes de \mathcal{D} , il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

EXEMPLE

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ (en fait c'est une limite à droite) ;
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. À droite en 0, la fonction tend vers 0. À gauche elle tend vers 1.

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$
- $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$ où H désigne la fonction de Heaviside, qui vaut 1 sur \mathbb{R}_+^* et 0 sur \mathbb{R}_-^* .

DÉFINITION 2.15 — CONTINUITÉ À GAUCHE, À DROITE

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} .

La fonction f est **continue à gauche en x_0** si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$.

Elle est **continue à droite en x_0** si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$.

PROPOSITION 2.16 — LIEN ENTRE LIMITE, LIMITES À GAUCHE ET À DROITE

Soit x_0 un point ou une borne de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

DÉM. Il suffit d'aligner les définitions. □

EXEMPLE L'exemple typique d'application de ce théorème est la fonction sinus-cardinal, définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Cette fonction, non définie en 0, admet tout de même une limite en 0, à savoir 1.

PROPOSITION 2.18 — LIEN ENTRE CONTINUITÉ, LIMITES À GAUCHE ET À DROITE

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de \mathcal{D} .

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

DÉM. Il suffit d'aligner les définitions. La dernière condition est rendu nécessaire par le fait que la limite à gauche ou à droite exclut le point x_0 . □

EXEMPLE La fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est donc pas continue en 2.

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXEMPLE La fonction sinus-cardinal peut être prolongé par continuité en 0 de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette façon de procéder est tellement commode qu'elle mérite un théorème.

THÉORÈME & DÉFINITION 2.2I — PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Soit x_0 un point de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0 , alors il existe un unique prolongement \tilde{f} de f à $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ tel que \tilde{f} soit continue en x_0 .

On parle du **prolongement par continuité** de f en x_0 .

DÉM. Soit \tilde{f} une telle fonction. Comme c'est un prolongement de f , on a bien sûr $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$.

Comme \tilde{f} est continue en x_0 , nécessairement

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{f} \\ \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f \quad \text{puisque } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ sur } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Ce qui fixe la valeur de \tilde{f} en x_0 . Ainsi

$$\forall x \in \mathcal{D} \cup \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien un prolongement de f sur $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ continue en x_0 , et c'est le seul. □

Au sens strict, f et \tilde{f} ne sont pas la même fonction. Mais elles partagent de nombreuses propriétés en commun, ce qui conduit en pratique à confondre f et \tilde{f} .

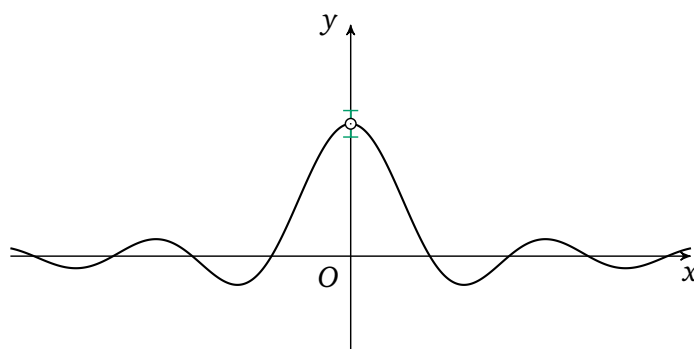


FIGURE I.6 — Prolongement par continuité

III — OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

III.1 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

J'appelle « théorèmes généraux » les résultats permettant de calculer une limite à partir d'autres limites connues.

Ces résultats sont admis.

THÉORÈME 3.1 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES – LIMITES FINIES

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell + \ell' & f(x) \times g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \times \ell' \\ \lambda f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell & \frac{1}{f(x)} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0 \end{aligned}$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

Il se transcrit directement en terme de continuité ponctuelle.

COROLLAIRE 3.2 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES ET CONTINUITÉ PONCTUELLE

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en x_0 alors λf , $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0 .

Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0 .

THÉORÈME 3.3 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES – LIMITES INFINIES

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D} .

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$;
- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$ alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell > 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ et $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$.

En modifiant le signe de f et/ou de g , on traite le cas des limites $-\infty$, etc.
Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».
Aucun théorème général ne s'applique dans ces cas-là. Des méthodes plus pointues peuvent parfois permettre de déterminer ces limites.

$$\begin{array}{ccc} & \ll \infty - \infty \gg & \ll 1^\infty \gg. \\ \ll \frac{0}{0} \gg & = & \ll \infty \times 0 \gg = \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \end{array}$$

III.2 — COMPOSÉE

THÉORÈME 3.4 — COMPOSÉE

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_f ,

On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 , ℓ est un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_g et que g admet une limite ℓ' en ℓ .

Dans ce cas $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$.

Ce théorème a l'énoncé complexe est extrêmement utile. Il permet, en pratique, de calculer la plupart des limites.

EXEMPLE

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x} =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/\sqrt{x}) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\sin(x)}} =$

COROLLAIRE 3.6 — CONTINUITÉ D'UNE COMPOSÉE

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D}_f .

On suppose que f est continue en x_0 , que $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$ et que g est continue en $f(x_0)$.

Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Le théorème de composition peut se particulariser dans le cas de la composée d'une fonction et d'une suite.

THÉORÈME 3.7 — LIMITE DE FONCTION ET DE SUITE

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne de \mathcal{D} . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0.$$

Si f tend vers ℓ en x_0 alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

EXEMPLE Limite de $4^n \sin(4^{-n})$:

APPLICATION 2 — FONCTION N'ADMETTANT PAS DE LIMITE EN 0

La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

De même la fonction \sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

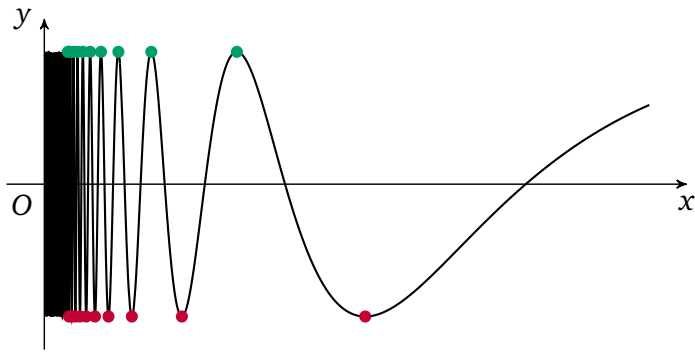


FIGURE I.7 — Une fonction sans limite en 0

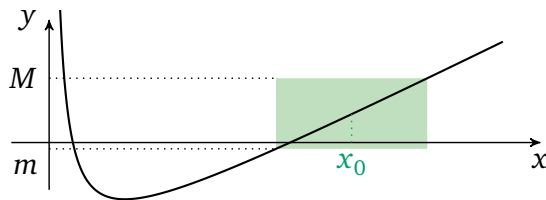
IV — LIMITES ET ORDRE

IV.I — À PARTIR D'UNE LIMITE CONNUE, RENSEIGNEMENTS SUR f

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit x_0 un point de \mathcal{D} , éventuellement une borne finie ou infinie.

PROPOSITION 4.1 — Si f admet une limite finie en x_0 alors f est bornée sur un voisinage de x_0 .

DÉM. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition. □



PROPOSITION 4.2 — Si f admet une limite strictement positive en x_0 alors f est strictement positive sur un voisinage de x_0 .

DÉM. On prend $\varepsilon = \ell/2$ dans la définition. □

Ce résultat rend de multiples services : par exemple il assure que $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0 .

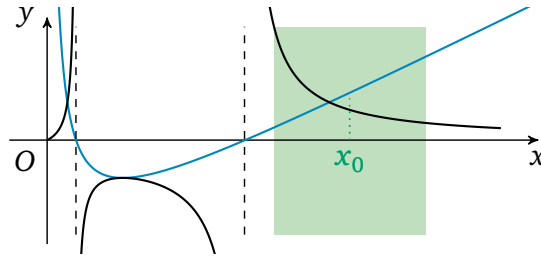


FIGURE I.8 — $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0

COROLLAIRE 4.3 — Si f admet une limite strictement négative en x_0 alors f est négative sur un voisinage de x_0 .

COROLLAIRE 4.4 — Si f admet une limite finie non nulle en x_0 alors f est non nulle sur un voisinage de x_0 .

En particulier, si f admet une limite non nulle en x_0 alors $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0 .

IV.2 — À PARTIR D'UN ENCADREMENT SUR f , RENSEIGNEMENTS SUR LA LIMITE

PROPOSITION 4.5 — Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . On suppose que f admet une limite en x_0 .

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > a \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f \geq a$$

DÉM. Considérons le cas d'une limite finie, le seul qui soit vraiment intéressant ici.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ainsi, ε étant quelconque,

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\quad f(x) - \varepsilon < \ell < f(x) + \varepsilon$$

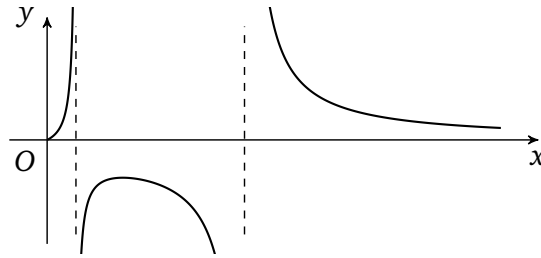
ou encore, puisque $f(x) > a$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a - \varepsilon < \ell$$

Cette inégalité assure que $\ell \geq a$, mais aucunement que $\ell > a$. □

De façon symétrique si $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < a$ alors $\lim_{x_0} f < a$.

EXEMPLE Par exemple $1/x > 0$ sur \mathbb{R}_+^* , mais $1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.



COROLLAIRE 4.7 — Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si f et g admettent toutes deux une limite en x_0 , et si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

DÉM. En appliquant la proposition précédente à la fonction $f - g$. □

EXEMPLE

– $\sin x < x$ sur $]0 ; 1[$ et pourtant elles ont la même limite en 0.

– de même avec $1/x^2$ et $1/x$ en l’infini :

IV.3 — THÉORÈMES D’ENCADREMENT

Nous voyons maintenant les résultats les plus puissants permettant de déterminer l’existence et la valeur d’une limite.

THÉORÈME 4.9 — THÉORÈME D’ENCADREMENT

Soit f, u et v trois fonctions définies sur \mathcal{D} et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad u(x) < f(x) < v(x)$

si u et v admettent une limite en x_0

et si $\lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$
 alors f admet une limite en x_0
 et $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

THÉORÈME 4.I0 — THÉORÈME DE MINORATION/MAJORATION

Soit x_0 un point de \mathcal{D} , ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . Soit f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} telles que

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) < g(x)$$

$$\text{Si } \lim_{x_0} f = +\infty \quad \text{alors } \lim_{x_0} g = +\infty.$$

$$\text{Si } \lim_{x_0} g = -\infty \quad \text{alors } \lim_{x_0} f = -\infty.$$

IV.4 — LIMITES ET MONOTONIE

THÉORÈME 4.II — Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]a ; b[$, avec éventuellement a et b infinis.

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b .

La démonstration de ce théorème touche à la définition même de \mathbb{R} .

COROLLAIRE 4.I2 — Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I .

Attention ! On ne peut pas affirmer, en toute généralité, que ces limites soient égales à la valeur de f , ni même qu'elles soient égales entre elles.

Pensez par exemple à la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.