Limites d'une fonction — Continuité ponctuelle

Bcpst 1 — 24 octobre 2017

I — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

I.1 — Intervalles

Définition 1.1 — Intervalle de $\mathbb{R}$

Un intervalle *de $\mathbb{R}$ est un ensemble d'une des formes suivantes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$*

$$\varnothing, \quad \mathbb{R},$$
$$]\,a\,;b\,[, \quad]\,a\,;b\,], \quad [\,a\,;b\,[, \quad [\,a\,;b\,],$$
$$\{a\}, \quad]\,a\,;+\infty\,[, \quad [\,a\,;+\infty\,[, \quad]-\infty\,;a\,[, \quad]-\infty\,;a\,]$$

Propriété 1.2 — *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de continuité*

$$\forall(\alpha,\beta) \in I^2, \quad \alpha < x < \beta \Longrightarrow x \in I$$

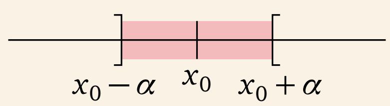
Dém. En énumérant les différentes formes d'intervalles. □

Définition 1.3 — Segment de $\mathbb{R}$

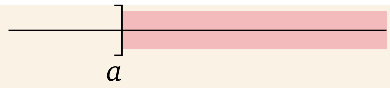
Un segment *de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[\,a\,;\,b\,]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.*

Définition 1.4 — Voisinage

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage de x_0 *est un intervalle ouvert de la forme $]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.*



Un voisinage de $+\infty$ *est un intervalle ouvert de la forme $]a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.*



II — Limites d'une fonction en un point

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de $\mathbb{R}$.*

Typiquement : $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$.

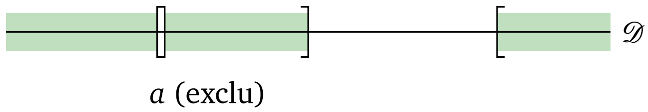


FIGURE I.1 — *Un exemple de domaine de définition*

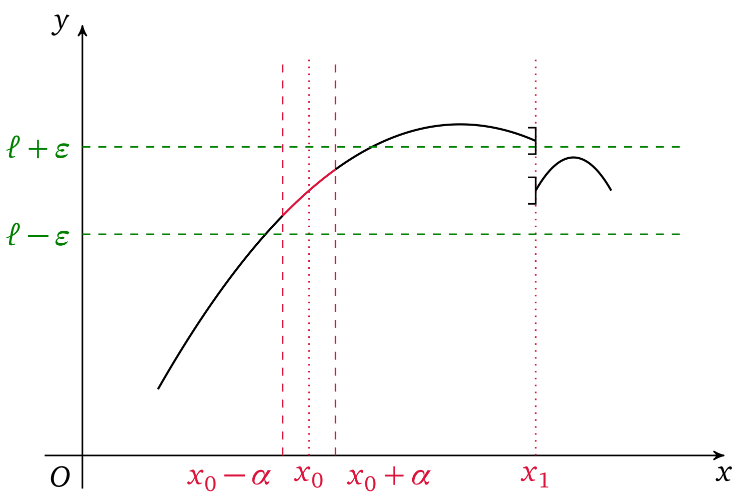
II.1 — Limites finies

Définition 2.2 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x \in \mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha \,; x_0 + \alpha\right[, \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



La fonction représentée ci-dessus admet une limite en x_0. Elle n'admet pas de limite en x_1.

Remarque I.1

- On demande à x d'être dans $\mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[$ afin d'une part que f soit définie en x et d'autre part que x soit dans un voisinage de x_0.
- On peut montrer que les inégalités dans la définition précédente peuvent être larges ou strictes : la notion définie est la même.

Proposition 2.3 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

Si f tend vers ℓ en x_0, alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Dém. Soit ℓ et ℓ' deux réels vérifiant

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \\
&\qquad x \in \mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \\
&\qquad x \in \mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha'\,;\, x_0 + \alpha'\right[\implies \left|f(x) - \ell'\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Prenons ε quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha'' = \inf(\alpha, \alpha')$. Prenons alors x quelconque dans $\mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha''\,;\, x_0 + \alpha''\right[$. Comme

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad &\text{et} \qquad \left|f(x) - \ell'\right| < \varepsilon \\
\left|\ell - \ell'\right| &= \left|\ell + f(x) - f(x) - \ell'\right| \\
&< |f(x) - \ell| + \left|f(x) - \ell'\right| < 2\varepsilon \qquad \text{avec l'inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\left|\ell - \ell'\right| < 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\ell = \ell'$. □

Notation On parle de la limite de f en x_0 et on note indifféremment $\lim\limits_{x_0} f = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Exemple On peut démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$: on prend $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ dans la définition de la limite.

Théorème & Définition 2.5 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que f est continue en x_0.

Dém. Revenons à la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad x \in \mathscr{D} \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si $x_0 \in \mathscr{D}$, alors on peut toujours prendre $x = x_0$ dans la seconde partie de la formule. On ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\ell = f(x_0)$. □

La différence entre la notion de limite en x_0 et la notion de continuité en x_0 est qu'une fonction continue en x_0 doit être *définie* en x_0.

Exemple La plupart des fonctions usuelles sont réputées continues sur leur domaine de définition.

II.2 — Limites infinies – Limite en l'infini

Définition 2.7 — Limites infinies en un point fini

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[, \quad f(x) > M.$$

La fonction f tend vers $-\infty$ en x_0 si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$. Dans ce cas la courbe représentative de f présente une asyptote verticale en x_0.

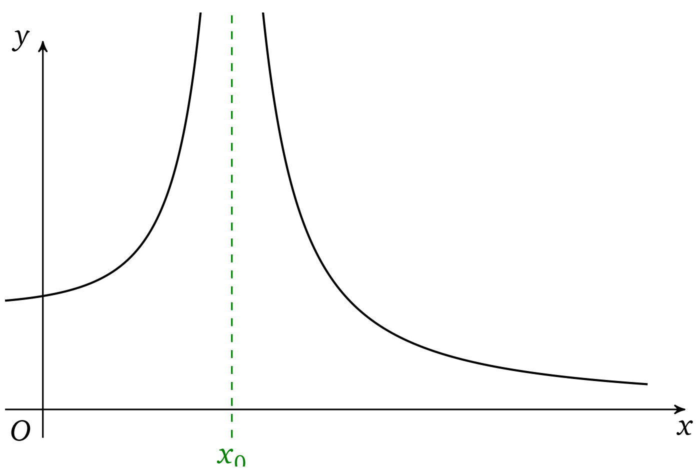


FIGURE I.2 — *Asymptote verticale* $x = x_0$.

Définition 2.8 — Limite finie en $+\infty$

On suppose que $\mathcal{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \qquad x \in \mathcal{D} \cap \left]A\,;+\infty\right[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une asymptote horizontale en $+\infty$.

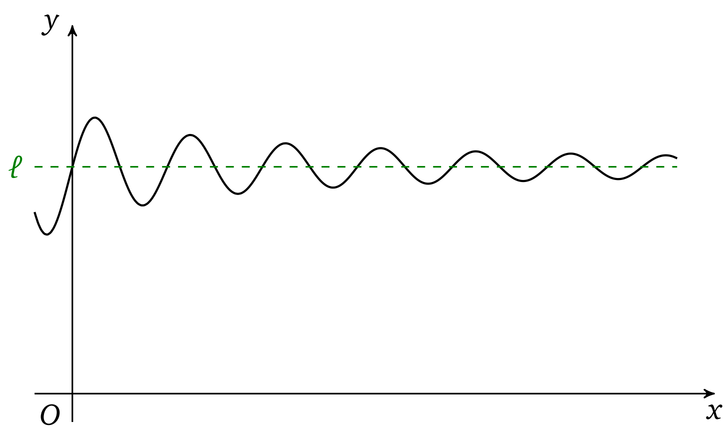


FIGURE I.3 — *Asymptote horizontale* $y = \ell$

Définition 2.9 — Limite infinie en $+\infty$

On suppose que $\mathcal{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \qquad x \in \mathcal{D} \cap \left]A\,;+\infty\right[\implies f(x) > M.$$

On définit de même les limites en $-\infty$. Notez qu'il y a également unicité de la limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

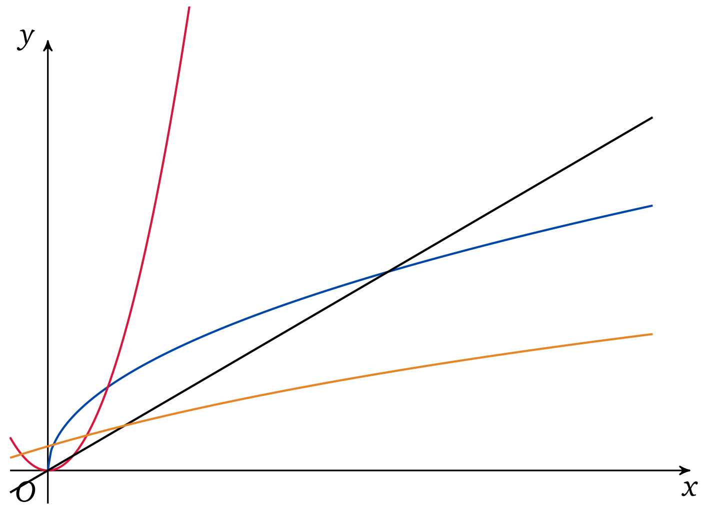


FIGURE I.4 — *Différents comportements possibles en* $+\infty$

Application 1 — Limite de ln en $+\infty$

Voici la démonstration d'un résultat que nous avons vu dans la partie sur le logarithme : $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout réel x plus grand que $3^{\lfloor A\rfloor+1}$, $\ln x > (\lfloor A\rfloor + 1)\ln 3 > \ln 3 \times A > A$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exists M \in R, \;\; x > M \Longrightarrow \ln(x) > A$$

Définition 2.10 — Limites par valeurs supérieures, inférieures

$f \;:\; \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geqslant \ell$ sur un voisinage de x_0. On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell^+$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) < \ell$ sur un voisinage de x_0.

On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell^-$.

II.3 — Limite à gauche, à droite

Définition 2.11 — Limite à gauche en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne supérieure de $\mathscr{D}$.

La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \left]-\infty\,;x_0\right[$ admet une limite en x_0.

Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x < x_0]{x \to x_0} \ell$.

Définition 2.12 — Limite à droite en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne inférieure de $\mathscr{D}$.

La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \left]x_0\,;+\infty\right[$ admet une limite en x_0. Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x > x_0]{x \to x_0} \ell$.

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

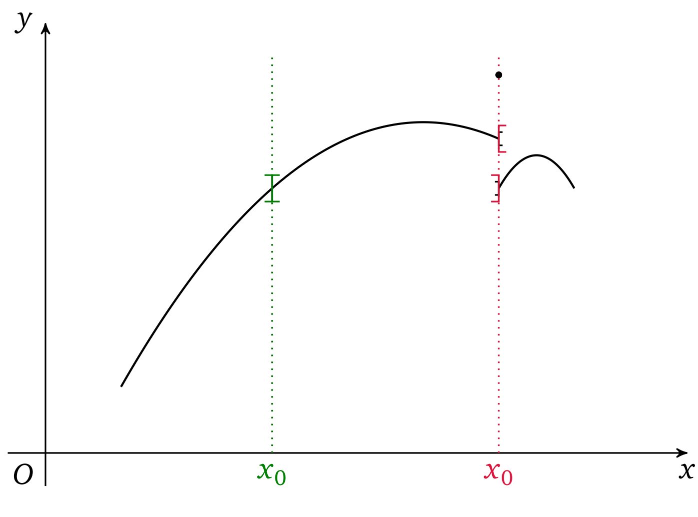
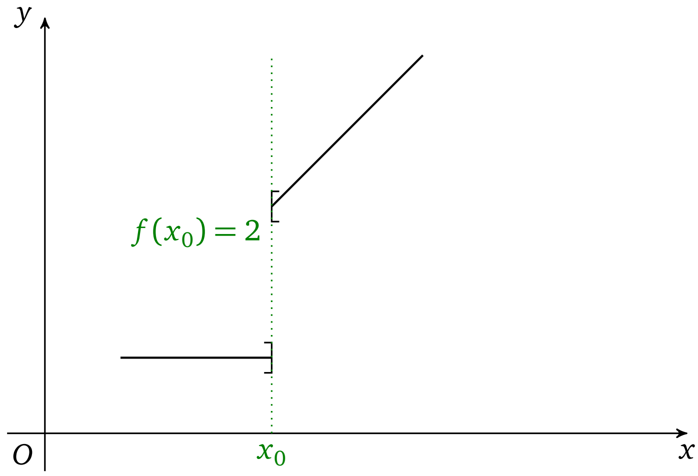


FIGURE I.5 — *Limites à gauche et à droite*

Exemple La fonction $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ admet 1 comme limite à gauche en 2 et 2 comme limite à droite en $x_0 = 2$.



Remarquez que la limite à gauche est différente de la valeur de la fonction en 2. En effet, pour étudier la limite à gauche, on prend la restriction de f à $[\,0\,;2\,[$, ce qui permet d'obtenir une limite différente de $f(2)$.

Important ! Aux bornes de $\mathscr{D}$, il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ (en fait c'est une limite à droite) ;
- Soit $f \;:\; \begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{vmatrix}$. À droite en 0, la fonction tend vers 0. À gauche elle tend vers 1.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} H(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} H(x) = 0$ où H désigne la fonction de Heaviside, qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Définition 2.15 — Continuité à gauche, à droite

Soit $f \;:\; \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

La fonction f est continue...

- *...à gauche en x_0 si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f = f(x_0)$;*
- *...à droite en x_0 si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f = f(x_0)$;*

Proposition 2.16 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite

Soit x_0 un point ou une borne de $\mathscr{D}$ et $f \;:\; \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \textit{auquel cas} \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Dém. Il suffit d'aligner les définitions. □

Exemple L'exemple typique d'application de ce théorème est la fonction sinus-cardinal, définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Cette fonction, non définie en 0, admet tout de même une limite en 0, à savoir 1.

Proposition 2.18 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Dém. Il suffit d'aligner les définitions. La dernière condition est rendu nécessaire par le fait que la limite à gauche ou à droite exclut le point x_0. □

Exemple La fonction $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ n'est donc pas continue en 2.

Exemple La fonction sinus-cardinal peut être prolongé par continuité en 0 de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette façon de procéder est tellement commode qu'elle mérite un théorème.

Théorème & Définition 2.21 — Prolongement par continuité

Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0, alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathscr{D} \cup \{x_0\}$ tel que $\tilde{f}$ soit continue en x_0.

On parle du prolongement par continuité de f en x_0.

Dém. Soit $\tilde{f}$ une telle fonction. Comme c'est un prolongement de f, on a bien sûr $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}$.

Comme $\tilde{f}$ est continue en x_0, nécessairement

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x_0+} \tilde{f} \\ \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x_0+} f \qquad \text{puisque } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ sur } \mathscr{D} \end{aligned}$$

Ce qui fixe la valeur de $\tilde{f}$ en x_0. Ainsi

$$\forall x \in \mathscr{D} \cup \{x_0\}, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathscr{D} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien un prolongement de f sur $\mathscr{D} \cup \{x_0\}$ continue en x_0, et c'est le seul. □

Au sens strict, f et $\tilde{f}$ ne sont pas la même fonction. Mais elles partagent de nombreuses propriétés en commun, ce qui conduit en pratique à confondre f et $\tilde{f}$.

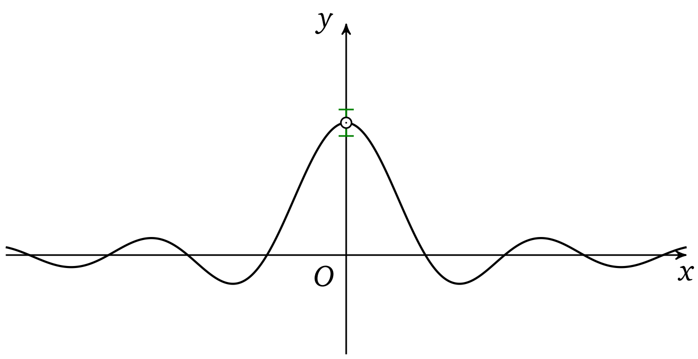


FIGURE I.6 — *Prolongement par continuité*

III — Opérations sur les limites

III.1 — Opérations algébriques

J'appelle « théorèmes généraux » les résultats permettant de calculer une limite à partir d'autres limites connues.

Ces résultats sont admis.

Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 *un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathscr{D}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ *et que* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell'$, *avec* ℓ *et* ℓ' *deux réels.*

$$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell+\ell' \qquad f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell\times\ell'$$

$$\lambda f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda\ell \qquad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

Il se transcrit directement en terme de continuité ponctuelle.

Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 *un point de* $\mathscr{D}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f *et* g *sont continues en* x_0 *alors* λf, $f+g$ *et* $f\times g$ *sont continues en* x_0.

Si, de plus, $f(x_0)\neq 0$ *alors* $1/f$ *est continue en* x_0.

Théorème 3.3 — Opérations algébriques – Limites infinies

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathscr{D}$.

- *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ *et* $-f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$;
- *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$;
- *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$;
- *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell > 0$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$
- *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *et* $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

En modifiant le signe de f et/ou de g, on traite le cas des limites $-\infty$, etc.

Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

Aucun théorème général ne s'applique dans ces cas-là. Des méthodes plus pointues peuvent parfois permettre de déterminer ces limites.

$$\text{« } \infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 1^{\infty} \text{ »}.$$
$$\text{« } \frac{0}{0} \text{ »} = \text{« } \infty \times 0 \text{ »} = \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

III.2 — Composée

Théorème 3.4 — Composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}_f$,

On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0, ℓ est un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}_g$ et que g admet une limite ℓ' en ℓ.

Dans ce cas $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$.

Ce théorème a l'énoncé complexe est extrêmement utile. Il permet, en pratique, de calculer la plupart des limites.

Exemple

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\sin x} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(1/\sqrt{x}) =$
- $\lim\limits_{x \to 0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(x)}} =$

Corollaire 3.6 — Continuité d'une composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}_f$.

On suppose que f est continue en x_0, que $f(x_0) \in \mathscr{D}_g$ et que g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Le théorème de composition peut se particulariser dans le cas de la composée d'une fonction et d'une suite.

Théorème 3.7 — Limite de fonction et de suite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$ ou une borne de $\mathscr{D}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$.

Si f tend vers ℓ en x_0 alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Exemple Limite de $4^n \sin(4^{-n})$:

Application 2 — Fonction n'admettant pas de limite en 0
La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.
De même la faonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

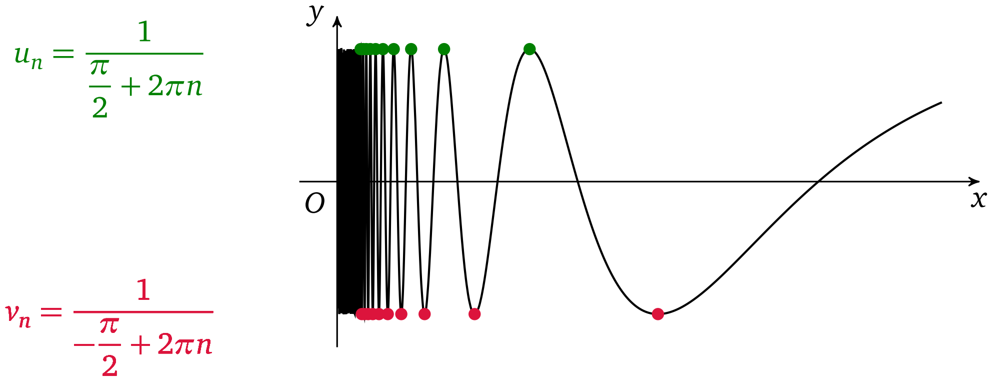


FIGURE I.7 — *Une fonction sans limite en* 0

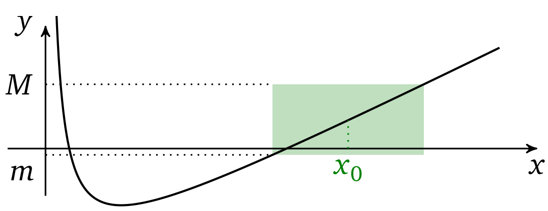
IV — Limites et ordre

IV.1 — À partir d'une limite connue, renseignements sur f

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$, éventuellement une borne finie ou infinie.

Proposition 4.1 — *Si f admet une limite finie en x_0 alors f est bornée* sur un voisinage de x_0.

Dém. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition. □



Proposition 4.2 — *Si f admet une limite strictement positive en x_0 alors f est strictement positive* sur un voisinage de x_0.

Dém. On prend $\varepsilon = \ell/2$ dans la définition. □

Ce résultat rend de multiples services : par exemple il assure que $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0.

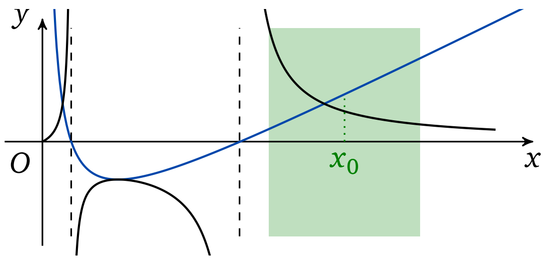


FIGURE I.8 — $1/f$ *est définie sur un voisinage de* x_0

Corollaire 4.3 — *Si f admet une limite strictement négative en x_0 alors f est négative* sur un voisinage de x_0.

Corollaire 4.4 — *Si f admet une limite finie non nulle en x_0 alors f est non nulle* sur un voisinage de x_0.

En particulier, si f admet une limite non nulle en x_0 alors $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0.

IV.2 — À partir d'un encadrement sur f, renseignements sur la limite

Proposition 4.5 — *Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathcal{D}$. On suppose que f admet une limite en x_0.*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad f(x) > a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x_0} f \geqslant a$$

Dém. Considérons le cas d'une limite finie, le seul qui soit vraiment intéressant ici.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha\,;x_0 + \alpha[\quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ainsi, ε étant quelconque,

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha\,;x_0 + \alpha[\qquad f(x) - \varepsilon < \ell < f(x) + \varepsilon$$

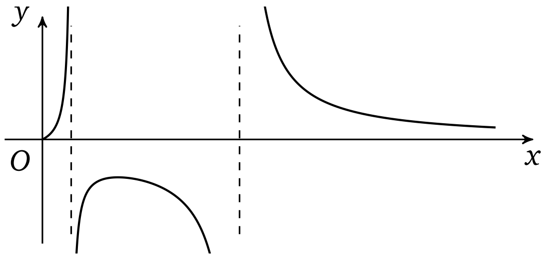
ou encore, puisque $f(x) > a$,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad a - \varepsilon < \ell$$

Cette inégalité assure que $\ell \geqslant a$, mais aucunement que $\ell > a$. □

De façon symétrique si $\forall x \in \mathscr{D}, \quad f(x) < a$ alors $\lim_{x_0} f < a$.

Exemple Par exemple $1/x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.



Corollaire 4.7 — *Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.*

Si f et g admettent toutes deux une limite en x_0, et si

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

Dém. En appliquant la proposition précédente à la fonction $f - g$. □

Exemple

- $\sin x < x$ sur $]0\,;1[$ et pourtant elles ont la même limite en 0.
- de même avec $1/x^2$ et $1/x$ en l'infini :

IV.3 — Théorèmes d'encadrement

Nous voyons maintenant les résultats les plus puissants permettant de déterminer l'existence et la valeur d'une limite.

Théorème 4.9 — Théorème d'encadrement

Soit f, u et v trois fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

Si	$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad u(x) < f(x) < v(x)$
si	*u et v admettent une limite en x_0*
et si	$\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$
alors	*f admet une limite en x_0*
et	$\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$

Théorème 4.10 — Théorème de minoration/majoration

Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$, ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ telles que

$$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad f(x) < g(x)$$

Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

IV.4 — Limites et monotonie

Théorème 4.11 — *Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]a\,;b[$, avec éventuellement a et b infinis.*

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b.

La démonstration de ce théorème touche à la définition même de $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.12 — *Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I.*

Attention ! On ne peut pas affirmer, en toute généralité, que ces limites soient égales à la valeur de f, ni même qu'elles soient égales entre elles.

Pensez par exemple à la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.