

# Limites d'une fonction — Continuité ponctuelle

BCPST I — 27 février 2017

## I — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

### I.1 — Intervalles

#### Définition 1.1 — Intervalle de $\mathbb{R}$

Un *intervalle* de  $\mathbb{R}$  est un ensemble d'une des formes suivantes  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

$$\emptyset, \mathbb{R}, \\ ]a; b[, ]a; b], [a; b[, [a; b], \\ \{a\}, ]a; +\infty[, [a; +\infty[, ]-\infty; a[, ]-\infty; a]$$

#### Propriété 1.2 — Un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de continuité

$$\forall (\alpha, \beta) \in I^2, \alpha < x < \beta \implies x \in I$$

**Dém.** En énumérant les différentes formes d'intervalles. □

#### Définition 1.3 — Segment de $\mathbb{R}$

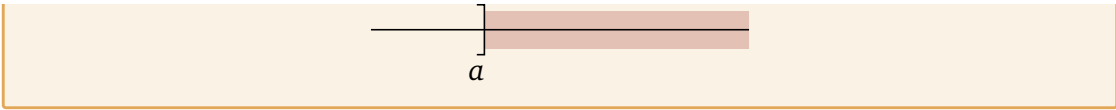
Un *segment* de  $\mathbb{R}$  est un intervalle de la forme  $[a; b]$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ .

#### Définition 1.4 — Voisinage

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Un *voisinage de  $x_0$*  est un intervalle ouvert de la forme  $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .

The diagram shows a horizontal number line with a central point labeled  $x_0$ . To the left of  $x_0$  is a point labeled  $x_0 - \alpha$ , and to the right is a point labeled  $x_0 + \alpha$ . A light red shaded region is drawn between  $x_0 - \alpha$  and  $x_0 + \alpha$ , with square brackets at the ends, representing the open interval  $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ .

Un *voisinage de  $+\infty$*  est un intervalle ouvert de la forme  $]a; +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .



## II — Limites d'une fonction en un point

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $\mathcal{D}$  est un *domaine* de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Typiquement :  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$  ou  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ .

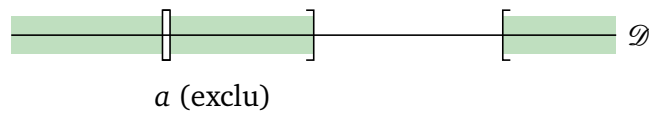
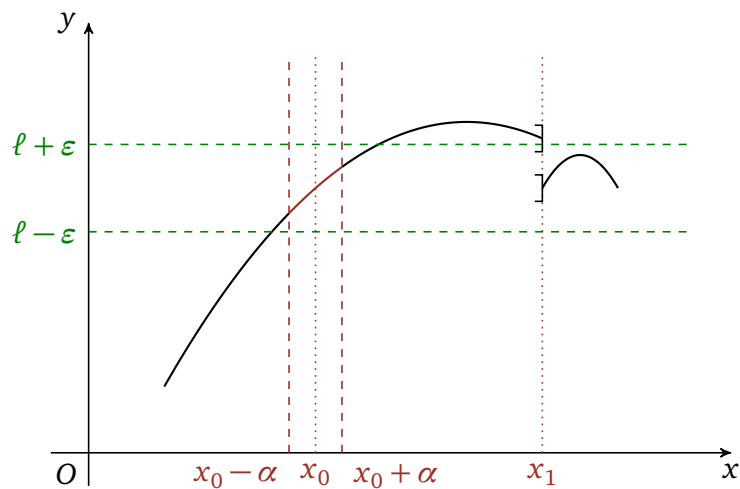


FIGURE I.1 — Un exemple de domaine de définition

### II.1 — Limites finies

**Définition 2.2 — Limite finie en un point**  
 Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ .  
 La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$


La fonction représentée ci-dessus admet une limite en  $x_0$ . Elle n'admet pas de limite en  $x_1$ .

**Remarque I.0**

- On demande à  $x$  d'être dans  $\mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$  afin d'une part que  $f$  soit définie en  $x$  et d'autre part que  $x$  soit dans un voisinage de  $x_0$ .
- On peut montrer que les inégalités dans la définition précédente peuvent être larges ou strictes : la notion définie est la même.

**Proposition 2.3 — Unicité de la limite**

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ .  
Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$ , alors il existe un seul réel  $\ell$  vérifiant cette propriété.

**Dém.** Soit  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels vérifiant

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \\ x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[ \quad \implies \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha' ; x_0 + \alpha'[ \quad \implies \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons  $\varepsilon$  quelconque dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha'' = \inf(\alpha, \alpha')$ . Prenons alors  $x$  quelconque dans  $\mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha'' ; x_0 + \alpha''[$ . Comme

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon \\ |\ell - \ell'| &= |\ell + f(x) - f(x) - \ell'| \\ &< |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon \quad \text{avec l'inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$ , ce qui prouve que  $\ell = \ell'$ . □

**Notation** On parle de **la limite de  $f$  en  $x_0$**  et on note indifféremment  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ .

**Exemple** On peut démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  : on prend  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$  dans la définition de la limite.

**Théorème & Définition 2.4 — Continuité ponctuelle**

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ .  
Si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors nécessairement cette limite est égale à  $f(x_0)$ . Dans ce cas, on dit que  $f$  est **continue en  $x_0$** .

**Dém.** Revenons à la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si  $x_0 \in \mathcal{D}$ , alors on peut toujours prendre  $x = x_0$  dans la seconde partie de la formule. On a ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui prouve que  $\ell = f(x_0)$ . □

La différence entre la notion de limite en  $x_0$  et la notion de continuité en  $x_0$  est qu'une fonction continue en  $x_0$  doit être *définie* en  $x_0$ .

**Exemple** La plupart des fonctions usuelles sont réputées continues sur leur domaine de définition.

## II.2 — Limites infinies – Limite en l'infini

### Définition 2.5 — Limites infinies en un point fini

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[, \quad f(x) > M.$$

La fonction  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $x_0$  si et seulement si  $-f$  tend vers  $+\infty$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ . Dans ce cas la courbe représentative de  $f$  présente une **asymptote verticale en  $x_0$** .

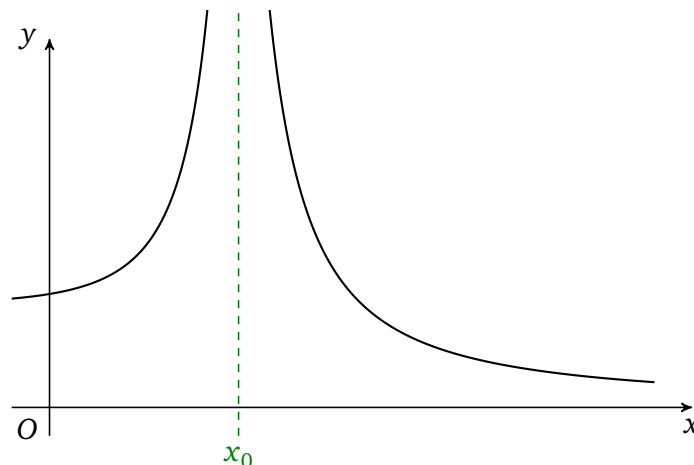


FIGURE I.2 — Asymptote verticale  $x = x_0$ .

**Définition 2.6 — Limite finie en  $+\infty$** 

On suppose que  $\mathcal{D}$  contient un voisinage de  $+\infty$ . Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad x \in \mathcal{D} \cap ]A; +\infty[ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Dans ce cas, la courbe représentative de  $f$  présente une **asymptote horizontale** en  $+\infty$ .

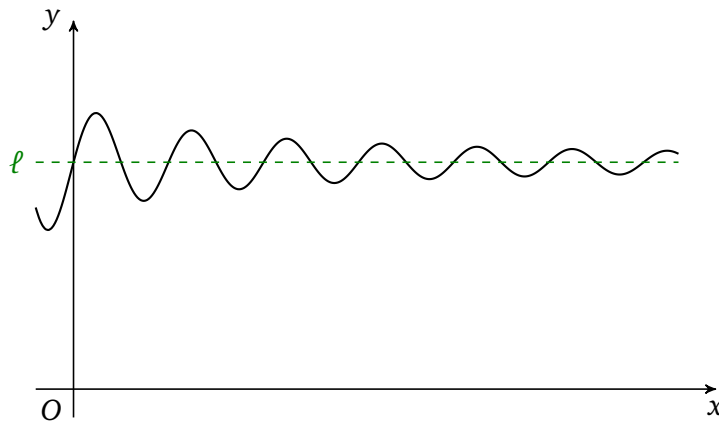


FIGURE I.3 — Asymptote horizontale  $y = \ell$

**Définition 2.7 — Limite infinie en  $+\infty$** 

On suppose que  $\mathcal{D}$  contient un voisinage de  $+\infty$ . Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \quad x \in \mathcal{D} \cap ]A; +\infty[ \implies f(x) > M.$$

On définit de même les limites en  $-\infty$ . Notez qu'il y a également unicité de la limite finie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

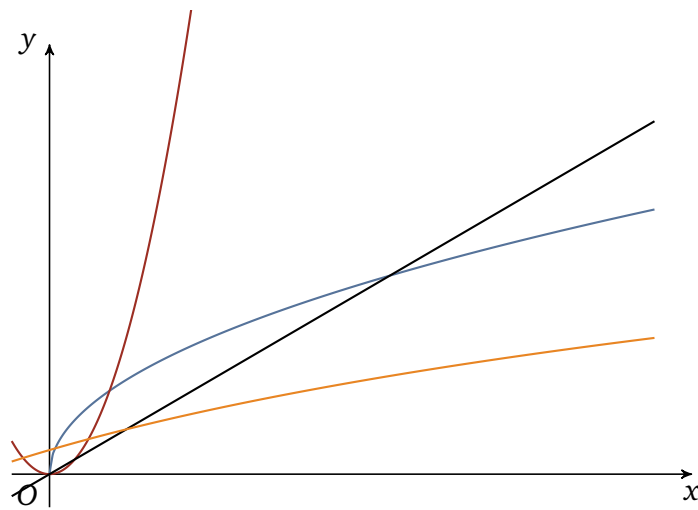


FIGURE I.4 — Différents comportements possibles en  $+\infty$

**Application I.0 — Limite de  $\ln$  en  $+\infty$**

Voici la démonstration d'un résultat que nous avons vu dans la partie sur le logarithme :  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors pour tout réel  $x$  plus grand que  $3^{\lfloor A \rfloor + 1}$ ,  $\ln x > (\lfloor A \rfloor + 1) \ln 3 > \ln 3 \times A > A$ . Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad x > M \implies \ln(x) > A$$

**Définition 2.8 — Limites par valeurs supérieures, inférieures**

$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  par valeurs supérieures en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et si  $f(x) \geq \ell$  sur un voisinage de  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$  ou bien  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^+$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  par valeurs inférieures quand  $x$  tend vers  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et si  $f(x) < \ell$  sur un voisinage de  $x_0$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$  ou bien  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^-$ .

### II.3 — Limite à gauche, à droite

#### Définition 2.9 — Limite à gauche en $x_0$

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne supérieure de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  admet une limite à gauche en  $x_0$  si et seulement si la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]-\infty ; x_0[$  admet une limite en  $x_0$ .

Cette limite est notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$ .

#### Définition 2.10 — Limite à droite en $x_0$

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne inférieure de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  admet une limite à droite en  $x_0$  si et seulement si la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]x_0 ; +\infty[$  admet une limite en  $x_0$ . Cette limite est notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$  ou

$f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$ .

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

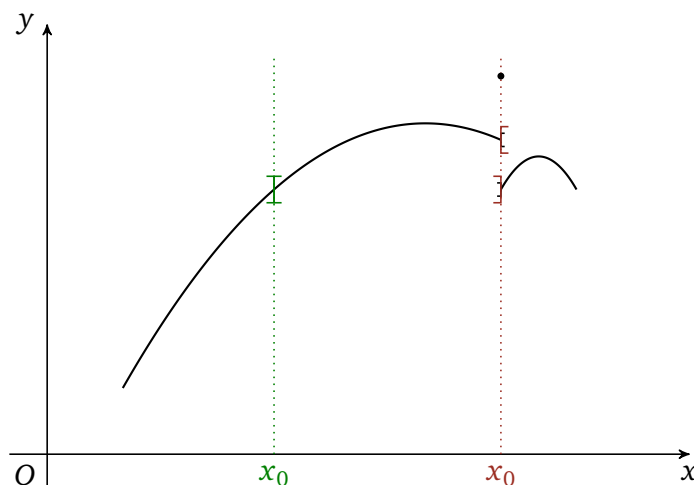
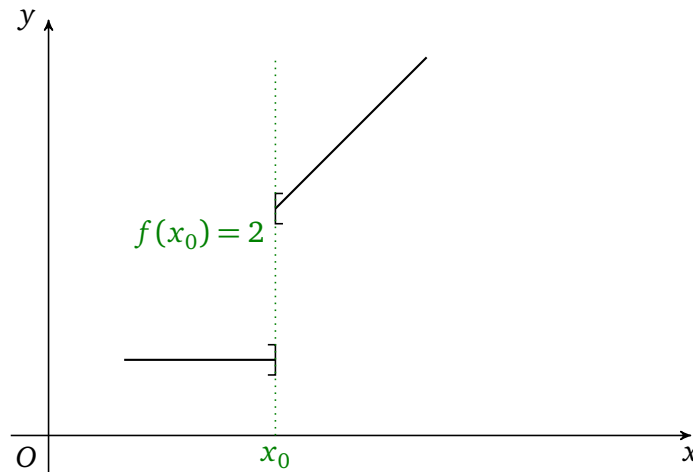


FIGURE I.5 — Limites à gauche et à droite

**Exemple** La fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  admet 1 comme limite à gauche en 2 et 2 comme limite à droite en  $x_0 = 2$ .

$$x \mapsto \begin{cases} x & x > 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



Remarquez que la limite à gauche est différente de la valeur de la fonction en 2. En effet, pour étudier la limite à gauche, on prend la restriction de  $f$  à  $[0 ; 2[$ , ce qui permet d'obtenir une limite différente de  $f(2)$ .

**Important !** Aux bornes de  $\mathcal{D}$ , il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

**Exemple**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  (en fait c'est une limite à droite) ;
- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  . À droite en 0, la fonction tend vers 0. À gauche elle tend vers 1.  

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor$$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} H(x) = 1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} H(x) = 0$  où  $H$  désigne la fonction de Heaviside, qui vaut 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$  et 0 sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

**Définition 2.11 — Continuité à gauche, à droite**  
 Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ .  
 La fonction  $f$  est *continue...*

- ...à gauche en  $x_0$  si elle admet une limite à gauche en  $x_0$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$ ;
- ...à droite en  $x_0$  si elle admet une limite à droite en  $x_0$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$ ;

**Proposition 2.12 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite**  
 Soit  $x_0$  un point ou une borne de  $\mathcal{D}$  et  $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .



La fonction  $f$  admet une limite en  $x_0$  si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en  $x_0$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

**Dém.** Il suffit d'aligner les définitions. □

**Exemple** L'exemple typique d'application de ce théorème est la fonction sinus-cardinal, définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Cette fonction, non définie en 0, admet tout de même une limite en 0, à savoir 1.

**Proposition 2.13 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en  $x_0$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

**Dém.** Il suffit d'aligner les définitions. La dernière condition est rendu nécessaire par le fait que la limite à gauche ou à droite exclut le point  $x_0$ . □

**Exemple** La fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  n'est donc pas continue en 2.

$$x \mapsto \begin{cases} x & x > 2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple** La fonction sinus-cardinal peut être prolongé par continuité en 0 de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette façon de procéder est tellement commode qu'elle mérite un théorème.

**Théorème & Définition 2.14 — Prolongement par continuité**

Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  et  $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  admet une limite en  $x_0$ , alors il existe un unique prolongement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$  tel que  $\tilde{f}$  soit continue en  $x_0$ .

On parle du *prolongement par continuité* de  $f$  en  $x_0$ .

**Dém.** Soit  $\tilde{f}$  une telle fonction. Comme c'est un prolongement de  $f$ , on a bien sûr  $\tilde{f}(x) = f(x)$  pour  $x \in \mathcal{D}$ .

Comme  $\tilde{f}$  est continue en  $x_0$ , nécessairement

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{f} \\ \tilde{f}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f \quad \text{puisque } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ sur } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Ce qui fixe la valeur de  $\tilde{f}$  en  $x_0$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathcal{D} \cup \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathcal{D} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f & x = x_0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien un prolongement de  $f$  sur  $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$  continue en  $x_0$ , et c'est le seul. □

Au sens strict,  $f$  et  $\tilde{f}$  ne sont pas la même fonction. Mais elles partagent de nombreuses propriétés en commun, ce qui conduit en pratique à confondre  $f$  et  $\tilde{f}$ .

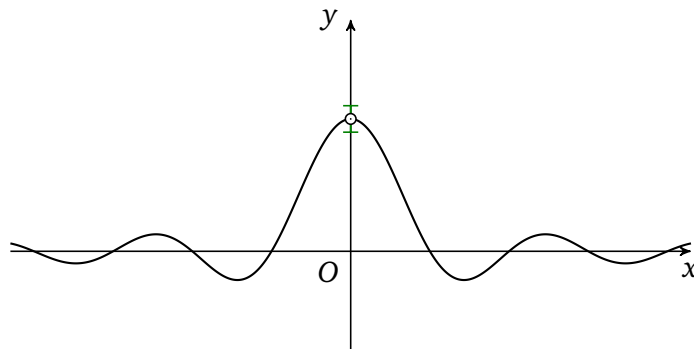


FIGURE I.6 — *Prolongement par continuité*

### III — Opérations sur les limites

#### III.1 — Opérations algébriques

J'appelle « théorèmes généraux » les résultats permettant de calculer une limite à partir d'autres limites connues.

Ces résultats sont admis.

**Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  et que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$ , avec  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell + \ell' & f(x) \times g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \times \ell' \\ \lambda f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell & \frac{1}{f(x)} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0 \end{aligned}$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.  
Il se transcrit directement en terme de continuité ponctuelle.

**Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  alors  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $f \times g$  sont continues en  $x_0$ .

Si, de plus,  $f(x_0) \neq 0$  alors  $1/f$  est continue en  $x_0$ .

**Théorème 3.3 — Opérations algébriques – Limites infinies**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  et  $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$  ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$  alors  $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell > 0$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  ;
- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  et  $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ .

En modifiant le signe de  $f$  et/ou de  $g$ , on traite le cas des limites  $-\infty$ , etc.

Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

Aucun théorème général ne s'applique dans ces cas-là. Des méthodes plus pointues peuvent parfois permettre de déterminer ces limites.

$$\begin{aligned} &\ll \infty - \infty \gg \quad \ll 1^\infty \gg, \\ &\ll \frac{0}{0} \gg = \ll \infty \times 0 \gg = \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \end{aligned}$$

### III.2 — Composée

#### **Théorème 3.4 — Composée**

Soit  $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions numériques et  $x_0$  un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}_f$ ,

On suppose que  $f$  admet une limite (finie ou infinie)  $\ell$  en  $x_0$ ,  $\ell$  est un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}_g$  et que  $g$  admet une limite  $\ell'$  en  $\ell$ .

Dans ce cas  $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$ .

Ce théorème a l'énoncé complexe est extrêmement utile. Il permet, en pratique, de calculer la plupart des limites.

#### **Exemple**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x} =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/\sqrt{x}) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\sin(x)}} =$

#### **Corollaire 3.5 — Continuité d'une composée**

Soit  $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}_f$ .

On suppose que  $f$  est continue en  $x_0$ , que  $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$  et que  $g$  est continue en  $f(x_0)$ . Alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

Le théorème de composition peut se particulariser dans le cas de la composée d'une fonction et d'une suite.

#### **Théorème 3.6 — Limite de fonction et de suite**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  ou une borne de  $\mathcal{D}$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ .

Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$  alors  $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Exemple** Limite de  $4^n \sin(4^{-n})$  :

#### **Application I.0 — Fonction n'admettant pas de limite en 0**

La fonction  $f(x) = \sin(1/x)$  n'a pas de limite en 0.

De même la fonction  $\sin$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

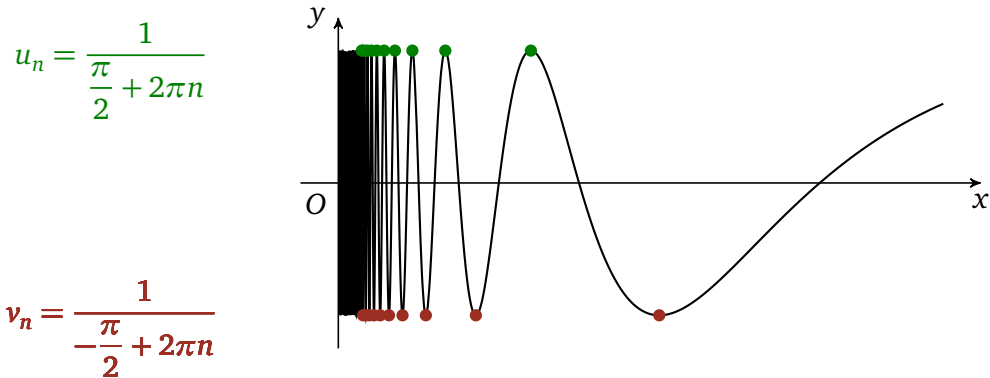


FIGURE I.7 — Une fonction sans limite en 0

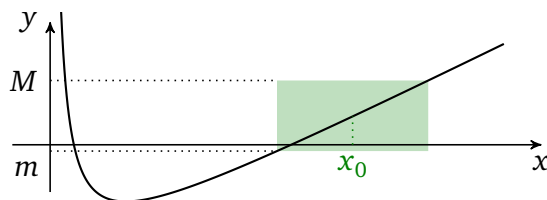
## IV — Limites et ordre

### IV.1 — À partir d’une limite connue, renseignements sur $f$

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ , éventuellement une borne finie ou infinie.

**Proposition 4.1** — Si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$  alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $x_0$ .

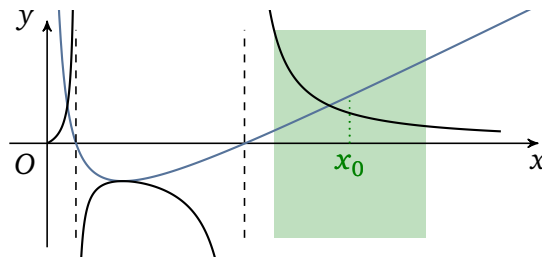
**Dém.** On prend  $\varepsilon = 1$  dans la définition. □



**Proposition 4.2** — Si  $f$  admet une limite strictement positive en  $x_0$  alors  $f$  est strictement positive sur un voisinage de  $x_0$ .

**Dém.** On prend  $\varepsilon = \ell/2$  dans la définition. □

Ce résultat rend de multiples services : par exemple il assure que  $1/f$  est définie sur un voisinage de  $x_0$ .

FIGURE I.8 —  $1/f$  est définie sur un voisinage de  $x_0$ 

**Corollaire 4.3** — Si  $f$  admet une limite strictement négative en  $x_0$  alors  $f$  est négative sur un voisinage de  $x_0$ .

**Corollaire 4.4** — Si  $f$  admet une limite finie non nulle en  $x_0$  alors  $f$  est non nulle sur un voisinage de  $x_0$ .

En particulier, si  $f$  admet une limite non nulle en  $x_0$  alors  $1/f$  est définie sur un voisinage de  $x_0$ .

## IV.2 — À partir d'un encadrement sur $f$ , renseignements sur la limite

**Proposition 4.5** — Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ . On suppose que  $f$  admet une limite en  $x_0$ .

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > a \implies \lim_{x_0} f \geq a$$

**Dém.** Considérons le cas d'une limite finie, le seul qui soit vraiment intéressant ici.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ainsi,  $\varepsilon$  étant quelconque,

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[ \quad f(x) - \varepsilon < \ell < f(x) + \varepsilon$$

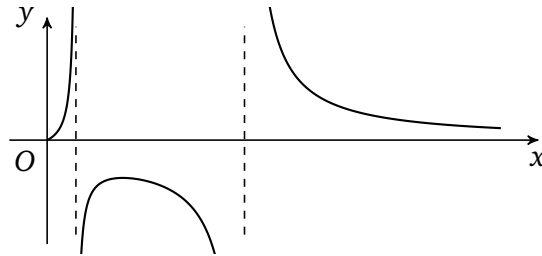
ou encore, puisque  $f(x) > a$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a - \varepsilon < \ell$$

Cette inégalité assure que  $\ell \geq a$ , mais aucunement que  $\ell > a$ . □

De façon symétrique si  $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < a$  alors  $\lim_{x_0} f < a$ .

**Exemple** Par exemple  $1/x > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , mais  $1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .



**Corollaire 4.6** — Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent toutes deux une limite en  $x_0$ , et si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

**Dém.** En appliquant la proposition précédente à la fonction  $f - g$ . □

### Exemple

- $\sin x < x$  sur  $]0 ; 1[$  et pourtant elles ont la même limite en 0.
- de même avec  $1/x^2$  et  $1/x$  en l'infini :

## IV.3 — Théorèmes d'encadrement

Nous voyons maintenant les résultats les plus puissants permettant de déterminer l'existence et la valeur d'une limite.

### Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement

Soit  $f$ ,  $u$  et  $v$  trois fonctions définies sur  $\mathcal{D}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

Si  $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad u(x) < f(x) < v(x)$

si  $u$  et  $v$  admettent une limite en  $x_0$

et si  $\lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

alors  $f$  admet une limite en  $x_0$

et  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

**Théorème 4.8 — Théorème de minoration/majoration**

Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ , ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathcal{D}$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) < g(x)$$

$$\text{Si } \lim_{x_0} f = +\infty \quad \text{alors } \lim_{x_0} g = +\infty.$$

$$\text{Si } \lim_{x_0} g = -\infty \quad \text{alors } \lim_{x_0} f = -\infty.$$

**IV.4 — Limites et monotonie**

**Théorème 4.9** — Soit  $f$  est une fonction monotone sur un intervalle  $]a ; b[$ , avec éventuellement  $a$  et  $b$  infinis.

Alors  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$  et en  $b$ .

La démonstration de ce théorème touche à la définition même de  $\mathbb{R}$ .

**Corollaire 4.10** — Si  $f$  est une fonction monotone sur un intervalle  $I$  alors  $f$  admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de  $I$ .

**Attention !** On ne peut pas affirmer, en toute généralité, que ces limites soient égales à la valeur de  $f$ , ni même qu'elles soient égales entre elles.

Pensez par exemple à la fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ .