Calcul intégral

Bcpst 1, 26/12/2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

I — Primitive d'une fonction

I.1 — Définition

Définition I.1 — Primitive d'une fonction
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
*On dit que F est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème I.2 — Structure de l'ensemble des primitives
Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive F_0, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Dém. Soit A l'ensemble des primitives de f et $B = \{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Montrons que $B \subset A$. Si $G \in B$ alors $G = F_0 + \lambda$, où λ est un scalaire. Alors G est dérivable et $G' = F_0' + 0 = f$. Donc G est une primitive de f, ce qui prouve que $B \subset A$.
Montrons maintenant que $A \subset B$. Soit H une primitive de f. La fonction $H - F_0$ est dérivable et sa dérivée est $H' - F_0' = f - f = 0$. Puisque cette dérivée est nulle *sur l'intervalle* I, c'est que $H - F_0$ est constante. Donc $H = F_0 + \lambda$, ce qui prouve que $H \in B$. D'où le résultat. □

Attention ! On ne parle pas de *la* primitive de f mais bien d'*une* primitive de f.

Théorème I.3 — Unicité d'une primitive
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

DÉM. Il existe bien une telle primitive : la fonction $F = F_0 - F_0(x_0) + y_0$ répond à la question.
Une telle primitive est unique. En effet, si on la note G, d'après le théorème précédent il existe un réel λ tel que $G = F + \lambda$. Mais $G(x_0) = F(x_0) + \lambda = y_0$ conduit à $\lambda = y_0 - F(x_0) = 0$. Donc $G = F$. □

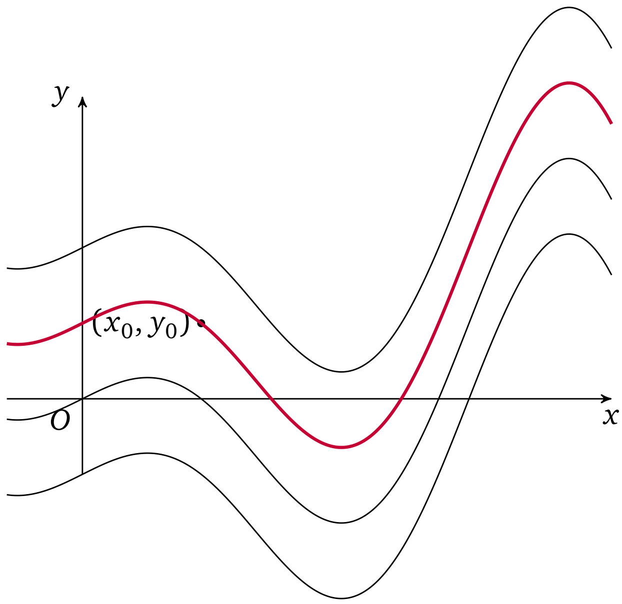
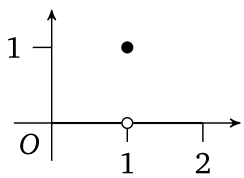


FIGURE I.1 — *Unicité de la primitive passant par* (x_0, y_0).

I.2 — EXISTENCE

On n'est jamais assuré qu'une fonction f quelconque admette une primitive. Voici un exemple de fonction n'admettant pas de primitive.

EXEMPLE A Soit $I = [0,2]$ et $f \; : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \text{ si } x \neq 1 \\ & & 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$



Supposons que f admette une primitive F sur $[0 ; 2]$. Comme F est dérivable en tout point de $[0 ; 1[$ et que sa dérivée est nulle, F est constante sur $[0, 1[$. De même F est constante sur $]1, 2]$. Donc il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que

$$\forall x \in [0 ; 1[, \quad F(x) = k_1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]1 ; 2], \quad F(x) = k_2$$

Mais comme F est aussi continue en 1, sa limite à droite et sa limite à gauche doivent être égales et donc $k_1 = k_2$. Ainsi F est constante sur $[0 ; 2]$, et donc f, qui est la dérivée de F, est nulle sur $[0 ; 2]$, ce qui est une contradiction.

Si l'existence d'une primitive n'est pas, en général, étabie, on dispose dans le cas des fonctions continues d'un théorème d'existence.

THÉORÈME 1.4 — EXISTENCE D'UNE PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f admet une primitive sur I.

DÉM. Ce théorème est admis. □

II — INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

II.1 — DÉFINITION DE L'INTÉGRALE

DÉFINITION 2.1 — INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE
Soit a et b deux points de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f.
La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.
On appelle ***intégrale de f entre a et b*** *le réel $F(b) - F(a)$ noté*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf.}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarquez que cette définition ne suppose pas d'ordre particulier entre a et b.

Justification de la définition Puisque f est continue, elle admet bien une primitive. De plus, si F et G sont deux primitives de f, on a vu qu'il existe un réel λ tel que $G = F + \lambda$. Or

$$G(b) - G(a) = (F(b) + \lambda) - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$$ □

Ainsi on peut calculer l'intégrale de f entre a et b en utilisant au choix G ou F...

THÉORÈME 2.2 — THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE
Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.
La fonction

$$F_a : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

DÉM. Dans le cadre de ce cours, ce théorème au nom pompeux est une trivialité. En effet, soit F une primitive de f. Comme

$$\forall x \in I, \qquad F_a(x) = \int_a^x f = F(x) - F(a)$$

on voit que F_a est une primitive de f. De plus $F_a(a) = 0$. En vertu du théorème **??**, c'est la seule primitive de f vérifiant cette dernière propriété. □

EXEMPLE

- Évidemment $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de sin. Mais de quelle fonction $\int_0^{2x} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle une primitive ?
- Dériver la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

II.2 — RELATION AVEC L'AIRE

Notion d'aire algébrique

La notion intuitive d'aire n'est pas satisfaisante d'un point de vue mathématique, car elle manque de généralité. Toutefois, elle va nous donner une bonne intuition de la notion d'intégrale.

On se place donc dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct [1]. On considère un domaine $\mathscr{D}$ délimité par une courbe continue et fermée $\mathscr{C}$.

On **oriente** le domaine $\mathscr{D}$ en choisissant un sens de parcourt de la courbe $\mathscr{C}$.

Dans le cas ou $\mathscr{C}$ n'a aucun point double, on appelle **aire algébrique** de $\mathscr{D}$ l'aire du domaine auquelle on attribue le signe + si la courbe est parcourue dans le sens trigonométrique, le signe − dans le cas contraire.

Si $\mathscr{C}$ admet un ou plusieurs point double, on décompose le domaine $\mathscr{D}$ en plusieurs sous-domaines. L'aire algébrique de $\mathscr{D}$ sera alors par définition la somme des aires algébriques des sous-domaines.

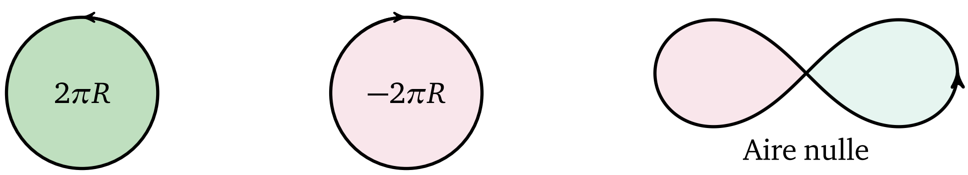


FIGURE I.2 — *Aire algébrique*

Cette définition intuitive manque de généralité. Par exemple elle ne rend pas compte de l'aire délimitée par le cercle trigonométrique auquel on retire un seul point (ou même un nombre fini de point).

1. Voir le chapitre de géométrie **??** pour la définition rigoureuse de ces termes

De plus cette définition ne permet pas *concrètement* de calculer une aire.
C'est pourquoi on définit rigoureusement l'aire à partr de l'intégrale, de la manière suivante.

Lien aire-intégrale On se place toujours dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct. Soient deux réels a et b quelconques, f une fonction continue définie entre a et b. Soit les points $A(a,0)$, $B(b,0)$, $B'(b,f(b)$ et $A'(a,f(a))$.
Le domaine orienté $\mathscr{I}_f$ est délimité par le segment $[AB]$, puis le segment $[BB']$ puis la portion de la courbe représentative de f comprise entre B' et A' et enfin par le segment $[A'A]$.

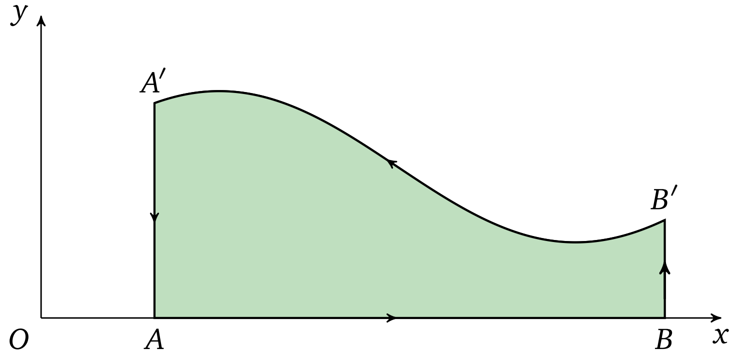


Figure I.3 — *Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

Par définition **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{I}_f$ est l'intégrale entre a et b de f :

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{I}_f\right) = \int_a^b f$$

Cette aire est un réel de signe quelconque. On peut constater que si f est positive et si $a \leqslant b$ (comme c'est le cas de la figure ci-dessus), le pourtour de $\mathscr{D}_f$ est décrit dans le sens trigonométrique et l'aire est bien positive. Ainsi le signe de cette aire algébrique suit bien la convention précisée ci-dessus.

III — Propriétés de l'intégrale

III.1 — Relation de Chasles

Propriété 3.1 — Relation de Chasles
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I.

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et $$\int_a^a f = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

DÉM. En effet, si F est une primitive de f alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

Les deux dernières propriétés résultent directement de la définition. □

Attention ! Remarquez que l'ordre des points a, b et c *n'a aucune importance.* À l'aide de la relation de Chasles, on va comprendre l'intérêt de prendre des aires *algébriques*.

Plaçons-nous dans le cas $a \leqslant c \leqslant b$, comme sur la figure ci-contre. L'aire (non algébrique) du domaine $(ABB'A')$ est égale à l'aire (non algébrique) du domaine $(ACC'A')$ *plus* l'aire (non algébrique) du domaine $(BCC'B')$.

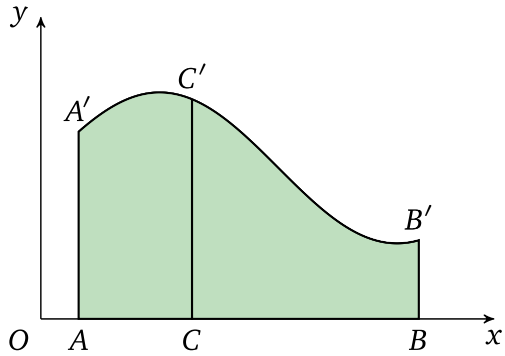


FIGURE I.4 — *Cas* $a < c < b$

Dans le cas où $a \leqslant b \leqslant c$, comme sur la figure ci-contre, l'aire (non algébrique) du domaine $(ABB'A')$ est égale à l'aire (non algébrique) du domaine $(ACC'A')$ *moins* l'aire (non algébrique) du domaine $(BCC'B')$.

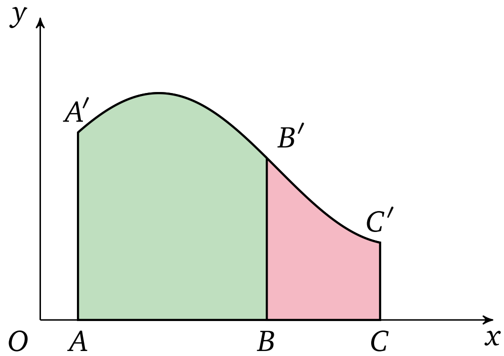


FIGURE I.5 — *Cas* $a < b < c$

Pour pouvoir utiliser la règle d'additivité des aires, il faut donc savoir si un des deux domaines est à l'intérieur de l'autre... et la situation est encore plus compliquée si un des domaines est partiellement dans l'autre !

Mais avec des aires algébriques, le problème ne se pose plus. Dans les deux cas précédents on peut écrire, en termes d'aire algébrique,

$$\mathscr{A}(ABB'A') = \mathscr{A}(ACC'A') + \mathscr{A}(BCC'B')$$

En effet dans la seconde figure, l'aire algébrique $\mathscr{A}(BCC'B')$ est négative (observez le sens du parcours du bord du domaine).
La relation de Chasles est simplement la traduction analytique de cette règle d'additivité des aires algébriques, puisque l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

COROLLAIRE 3.2 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}$, $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\,a\,;\,b\,]^n$.*

On a
$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

III.2 — LINÉARITÉ

PROPRIÉTÉ 3.3 — LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE
Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I, et donc*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I, et donc*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

EXEMPLE Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynôme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ est $Q(x) = a_n \frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x$.

COROLLAIRE 3.5 — *Soit $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ n fonctions continues sur I.*

On a
$$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k$$

III.3 — POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE

La positivité de l'intégrale traduit simplement la positivité de l'aire algébrique dans le cas d'une fonction positive, lorsque $a \leqslant b$.

PROPRIÉTÉ 3.6 — POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b) \in I$. Si f est positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. De plus si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

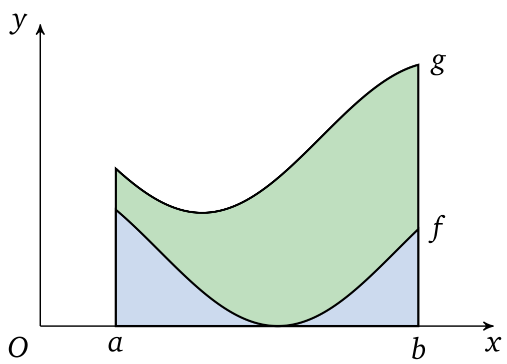
DÉM. Comme f est continue, elle admet une primitive F. Or $\forall x \in I, \quad F'(x) \geqslant 0$, donc F est une fonction croissante sur I. Notamment, comme $a \leqslant b$, $F(a) \leqslant F(b)$. Finalement
$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$$
Si $\int_a^b f = 0$, alors $F(b) = F(a)$. Mais comme F est croissante, $\forall x \in I, \quad F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$, donc $\forall x \in I, \quad F(x) = F(a)$ et F est une fonction constante. Par suite $f = F'$ est nulle. □

COROLLAIRE 3.7 — « CROISSANCE » DE L'INTÉGRALE
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\textit{Si} \quad f \leqslant g \textit{ et si } a \leqslant b \quad \textit{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

DÉM. La fonction $g - f$ étant continue et positive sur I, le résultat est immédiat. □

Dans le cas des fonctions positives, ce corollaire s'explique très facilement d'un point de vue géométrique : si $f \leqslant g$ alors le domaine délimité par la courbe de f est entièrement inclus dans le domaine délimité par la courbe de g.



Ce théorème, très important, est utilisé de différentes manières, notamment sous la forme de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.8 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

DÉM. Comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant -\int_a^b |f| \Longrightarrow \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \qquad \square$$

IV — MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALES

Dans toutes cette partie f et g sont deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G.

IV.1 — FORMULES USUELLES

Il suffit de lire son tableau de dérivées dans le sens contraire...

PROPRIÉTÉ 4.1 — UTILISATION DU FORMULAIRE
Soit u une fonction de classe C^1 sur I, qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} *est une primitive de* $-(n+1)u'u^n$ *sur* I *(avec* $n \neq -1$*);*
- $1/u$ *est une primitive de* $-u'/u^2$ *sur* I*;*
- $\ln|u|$ *est une primitive de* u'/u *sur* I*.*

DÉM. Seul le dernier point mérite une explication.
Tout d'abord, puisque u ne s'annule pas sur l'intervalle I, $|u|$ est strictement positive sur I : la fonction $\ln|u|$ est donc définie sur cet intervalle.
De plus, puisque u est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, u est de signe constant sur I. Comme $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, par composition $|u|$ est dérivable, de dérivée

$$|u|' = u' \frac{|u|}{u}$$

Par dérivée d'une composée

$$(\ln|u|)' = u' \frac{|u|}{u} \frac{1}{|u|} = \frac{u'}{u} \qquad \square$$

Application 1 — Primitive de tan
Sur son domaine de définition, $\tan = \sin / \cos$. On reconnaît une forme u'/u, au signe près. Ainsi une primitive de tan est $-\ln|\cos|$. Cette primitive est à considérer sur tout intervalle inclus dans le domaine de définition de tan, comme par exemple $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$.

IV.2 — Intégration par parties

Si f et g sont de classe C^1 sur I, alors $(fg)' = fg' + f'g$. Cette propriété s'emploie en terme d'intégration sous la forme suivante

Théorème 4.2 — Intégration par parties
Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a\,;\,b]$

$$\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$$

Application 2 — Primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$
Comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet une primitive. En vertu du théorème fondamental de l'Analyse, une primitive s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties à l'aide des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v(t) &= t & v'(t) &= 1 \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} F(x) &= \Big[t \times \ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - \int_1^x 1 = x\ln(x) - (x-1) \end{aligned}$$

On prend traditionnellement comme primitive de ln la fonction $x \mapsto xx\ln x - x$ (qui différe de la précédente d'une constante additive).

En pratique Il y a plusieurs choses à dire sur l'intégration par parties
1. C'est une technique qui transforme une intégrale, mais ne la calcule pas. Il reste toujours une intégrale à évaluer... plus simple que celle de départ espérons-le !

2. Il faut souvent « deviner » quelle partie de l'intégrande va jouer le rôle de u et laquelle va jouer le rôle de v. On est guidé pour cela par l'idée de simplifier l'intégrale. Par exemple dans le calcul de
$$\int_0^x t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$
on a « envie » de dériver t (pour le faire disparaître) et intégrer e^t ne pose pas de problème.
3. On demande aux deux fonctions u et v d'être de classe C^1 afin de s'assurer que les fonctions $u'v$ et uv' soient intégrales (puisque continues).

Exemple Soit à calculer
$$J = \int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x.$$
Ici on pourrait développer le polynôme et intégrer chaque terme. Mais il y a plus judicieux. Posons $u(x) = x - a$ et $v(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 et on trouve
$$\begin{aligned} J &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_a^b \frac{1}{2}(x-b)^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{1}{6}(x-b)^3\right]_a^b \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \end{aligned}$$

IV.3 — Changement de variable

Propriété 4.4 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : J \longrightarrow I$. Si f et u sont de classe C^1 alors la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u'(x)f'(u(x)) \end{array} \right.$ admet pour primitive la fonction $f \circ u$.*

Dém. La fonction $f \circ u$ est de classe C^1 sur J, donc dérivable, et
$$\forall x \in J \qquad (f \circ u)'(x) = u'(x)f'(u(x))$$
ce qui prouve que $f \circ u$ est bien une primitive de φ. □

En terme d'intégrale, on retiendra la propriété suivante :

Théorème 4.5 — Changement de variables – I

Soit a et b deux réels, u une fonction de classe C^1 de $[\,a\,;\,b\,]$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle $u\,\langle[\,a\,;\,b\,]\rangle$. On a l'égalité

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dém. Puisque f est continue, elle admet une primitive F. Soit G la fonction $F \circ u$. La fonction G est définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable (comme composée de fonctions dérivables). D'après la proposition précédente c'est une primitive de $t \mapsto u'(t)F'(u(t))$. Donc □

Théorème 4.6 — Changement de variables – II

Soit a et b deux réels, f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$. Soit u une fonction définie sur $[\,a\,;\,b\,]$, de classe C^1 sur cet intervalle et dont la dérivée ne s'annule pas.
On a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Dém. Remarquons tout d'abord que u est strictement monotone. En effet, u' est continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et ne s'annule jamais : elle est donc strictement positive ou strictement négative sur cet intervalle.
Ainsi u est bijective, ce qui établit l'existence de u^{-1}, sa bijection réciproque.
Appliquons alors le théorème précédent à u et f entre $u^{-1}(a)$ et $u^{-1}(b)$.

$$\int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(u^{-1}(a))}^{u(u^{-1}(b))} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

En pratique On écrit plus simplement

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$$

en convenant symboliquement que $\mathrm{d}u = u'(y)\,\mathrm{d}y$.

Exemple On demande de calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = 1 + \tan x$. (On trouve $2\ln 2 - 1$.)

IV.3.1 — Symétrie, périodicité, etc.
On va utiliser le changement de variables pour déterminer des propriétés d'intégrales de fonctions présentant certaines symétries.

PROPOSITION 4.8 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

- *Si f est paire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$;*
- *si f est impaire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$;*

V — CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALE

V.1 — FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

La formule de Taylor-Lagrange est la version « exacte » de la formule de Taylor sur les développements limités. « Exacte » dans la mesure où elle explique le reste du développement, même si ce reste n'est en pratique pas calculable.

THÉORÈME 5.1 — FORMULE DE TAYLOR–LAGRANGE À L'ORDRE 2
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Pour tout réels distincts a et b dans I, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

DÉM. Posons la fonction annexe

$$\varphi(t) = f(b) - \left[f(t) + f'(t)(b-t) + \frac{(b-t)^2}{2} A \right]$$

définie sur $[a ; b]$, continue et dérivable sur cet intervalle.
Il est possible de choisir la constante réelle A telle que $\varphi(a) = 0$

$$A = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) \right]$$

On constate alors que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le thm de Rolle, φ' s'annule donc en un point c sur $]a ; b[$. Or, pour t dans $[a ; b]$,

$$\varphi'(t) = f''(t)(b-t) - (b-t)A$$

Et ainsi $\varphi'(c) = 0$ implique $A = -f''(c)$. □

V.2 — Méthode des rectangles

Dans cette partie f est une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$. On note F une de ses primitives.
On va exposer un algorithme permettant de calculer de manière approchée l'intégrale de f sur I.
Sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on cherche à évaluer

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Une idée consiste à utiliser les premiers termes du développement limité de F

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) = F(a) + f(a)(x-a)$$

C'est-à-dire qu'on prend pour valeur approché de $\int -a^b f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \simeq f(a) \times (b-a)$$

Géométriquement, cela revient à approcher l'aire sous la courbe de la fonction f par l'aire d'un rectangle de base $[\,a\ ;\ b\,]$ et de hauteur $f(a)$.

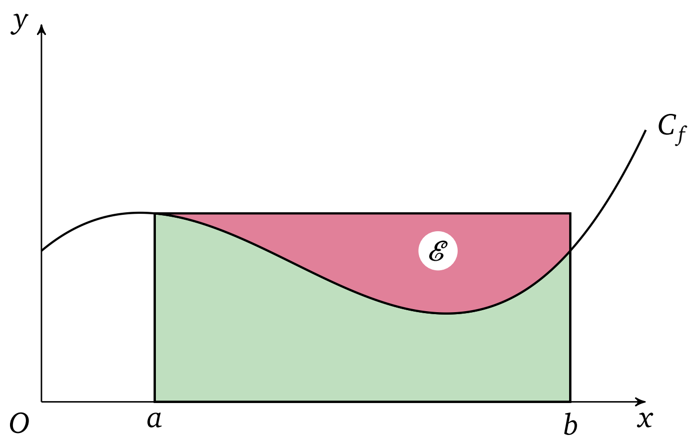


Figure I.6 — *Méthode des rectangles : un rectangle.*

Évaluons l'erreur commise si, au lieu de calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ on calculait l'aire du rectangle obtenu à l'aide de la fonction constante égale à $f(a)$. On cherche donc à évaluer le réel

$$\mathscr{E} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - f(a) \times (b-a) = F(b) - F(a) - f(a)(b-a) \tag{I.1}$$

On peut appliquer la formule des accroissements finis à la fonction F

$$\exists c \in \,]\,a\,;\,b\,[\,, \qquad \mathscr{E} = F'(c)(b-a) - f(a)(b-a) = (f(c) - f(a))(b-a) \tag{I.2}$$

puis à la fonction f

$$\exists d \in \,]a\,;c[\,, \qquad \mathscr{E} = f'(d)(c-a)(b-a) \tag{I.3}$$

Comme f est de classe C^1, f' est continue sur $[a\,;b]$ et donc $\left|f'\right|$ admet un majorant sur $[a\,;b]$, noté M. Ainsi

$$\left|f'(d)\right| \leqslant M$$

$$\left|f'(d)\right| \leqslant M(c-a)(b-a) \leqslant M(b-a)^2$$

$$|\mathscr{E}| \leqslant M(b-a)^2 \tag{*}$$

L'inégalité $(*)$ majore l'erreur commise. On constate qu'elle est d'autant plus petite que l'intervalle $[a\,;b]$ est plus petit.
L'idée qui vient alors à l'esprit est de diviser I en intervalles de longueurs arbitrairement petites et de voir ce que va donner le remplacement de f par une fonction constante sur chacun de ces intervalles.

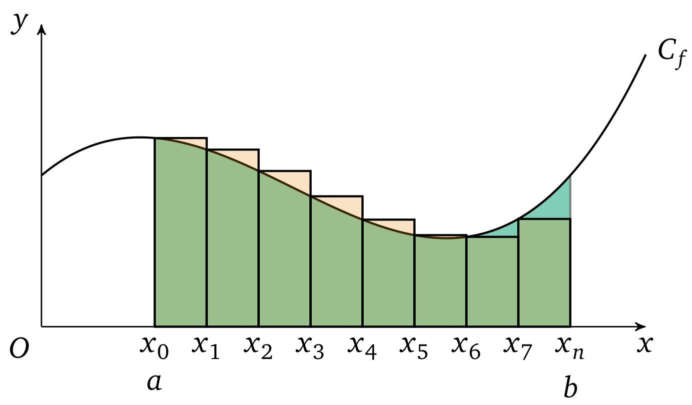


FIGURE I.7 — *Méthode des rectangles à gauche :* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$ soit la suite $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ définie par $\forall i \in [\![\, 0\,;n\,]\!]\,,, \quad x_i = a + (b-a) \times \dfrac{i}{n}$. On considère la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

PROPOSITION 5.2 —

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

DÉM.
On est donc ramené sur chacun des intervalles $[x_i\,;\,x_{i+1}]$ à évaluer l'erreur commise en remplaçant $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ par $|(x_{i+1}-x_i)f(x_i)|$. Cela à déjà été fait, c'est l'inégalité $(*)$, qui donne ici :

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)-f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i)-f(t)|\;\mathrm{d}t \leqslant M(x_{i+1}-x_i)^2$$
$$\leqslant M\frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

On somme ensuite de de 0 à $n-1$ pour trouver :

$$|E| =\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M\frac{(b-a)^2}{2n^2} \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2n}$$

Cette dernière inégalité prouve la proposition d'une part et nous donne une estimation de l'erreur (ou de la rapidité de convergence) de la méthode. On parle de méthode « en $1/n$ ». □

REMARQUE I.1 On aurait également pu prendre

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{somme de Riemann à droite}$$

ou encore

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{méthode du point milieu}$$

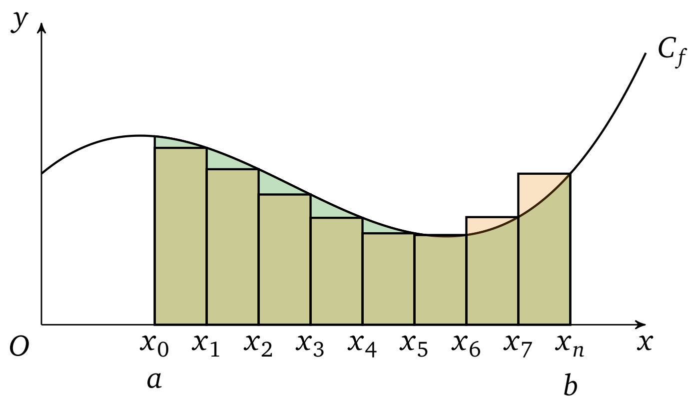


FIGURE I.8 — *Méthode des rectangles à droite :* $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

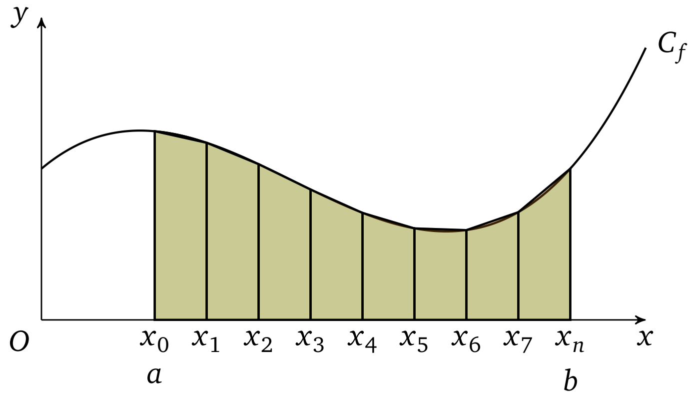


FIGURE I.9 — *Méthode des trapèzes* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$

DÉFINITION 5.3 — VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION
Soit $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Cette définition est justifiée par la méthode des rectangles. En effet, une définition intuitive de la moyenne d'une fonction serait la valeur, « pour n grand » de la somme

$$\frac{f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(b)}{n+1}$$

Or, justement, en utilisant le résultat précédent, cette somme tend vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ lorsque n tend vers $+\infty$.

V.3 — SOMMES DE RIEMANN

THÉORÈME 5.4 — SOMME DE RIEMANN À GAUCHE
Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut également parler de somme de Riemann à droite :

Théorème 5.5 — Somme de Riemann à droite
Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

VI — Extension de la définition de l'intégrale.

VI.1 — Fonction prolongeable par continuité

Définition 6.1 — *I est un intervalle de la forme $[a\,;b[$, f est continue sur I et admet une limite finie en b, alors par définition l'intégrale de f est l'intégrale du prolongement par continuité de f sur $[a\,;b]$.*

VI.2 — Intégrale d'une fonction continue par morceaux ; cas d'une fonction en escalier.

VI.3 — Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.