

# Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

BCPST I — 14 septembre 2017

**Notations du chapitre** — Dans ce chapitre,  $\mathbb{R}^2$  sera qualifié de « plan »,  $\mathbb{R}^3$  d'« espace » et les éléments de ces ensembles de « vecteurs » ou « points » selon le contexte.

## I — Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace.

### Définition 1.1 — Produit scalaire de deux vecteurs

**Dans le plan :** soit  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$  deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de  $u$  et  $v$  le réel

$$u \cdot v \stackrel{\text{déf.}}{=} xx' + yy'$$

**Dans l'espace :** soit  $u = (x, y, z)$  et  $v = (x', y', z')$  deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de  $u$  et  $v$  le réel

$$u \cdot v \stackrel{\text{déf.}}{=} xx' + yy' + zz'$$

### Propriété 1.2 — Propriétés du produit scalaire

**Dans le plan ou dans l'espace :** Soit  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs,  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires

- 1)  $u \cdot v = v \cdot u$ ;
- 2)  $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda \times u \cdot w + \mu \times v \cdot w$ .

### Définition 1.3 — Norme d'un vecteur

**Dans le plan ou dans l'espace :** Soit  $u$  un vecteur. Le réel  $u \cdot u$  est positif. On le nomme **carré scalaire** de  $u$ . Sa racine carrée est la **norme** de  $u$

$$\|u\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La **distance** entre deux points  $A$  et  $B$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :  $AB \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$ .

**Propriété 1.4 — Propriété de la norme**

*Dans le plan ou dans l'espace : Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs et  $\lambda$  un scalaire.*

- $\|u\| = 0 \iff u = 0$ ;
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$ ;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (inégalité triangulaire).

**Définition 1.5 — Orthogonalité de deux vecteurs**

*Dans le plan ou dans l'espace : Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont **orthogonaux** si et seulement si  $u \cdot v = 0$ .*

**Propriété 1.6 — Liberté d'une famille orthogonale**

*Dans le plan ou dans l'espace : Une famille de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre.*

La propriété précédente conduit à la notion de **base orthonormée** du plan, de l'espace.

**Théorème 1.7 — Expression du produit scalaire dans une base orthonormée**

*Dans le plan ou dans l'espace : L'expression du produit scalaire est la même dans toute base orthonormée.*

**Application 1 — Cercle dans le plan**

Soit  $\Omega$  un point du plan et  $R$  un réel positif. On appelle cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\Omega M = R$ . L'équation cartésienne du cercle s'écrit dans un repère orthonormé quelconque

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Réciproque : laquelle de ces équations définit un cercle du plan ?

1.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ ;
2.  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 3 = 0$ ;
3.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ .

## II — Déterminant de deux vecteurs du plan

### Définition 2.1 — Vecteurs colinéaires

*Dans le plan ou dans l'espace :* Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont *colinéaires l'un à l'autre* si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $u = kv$  ou  $v = ku$ .

Trois points  $A, B$  et  $C$  sont *alignés* si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.

### Définition 2.2 — Déterminant de deux vecteurs du plan

*Dans le plan :* Soit  $u(x, y) \in \mathbb{R}$  et  $v(x', y') \in \mathbb{R}^2$ . On appelle *déterminant de  $u$  et  $v$*  le scalaire

$$\det(u, v) \stackrel{\text{déf.}}{=} xy' - x'y$$

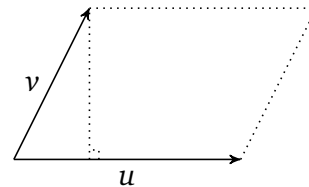
### Théorème 2.3 — Expression du déterminant dans une base orthogonale

*Dans le plan :* Le déterminant de deux vecteurs a la même expression dans toute base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$ .

### Théorème 2.4 — Colinéarité et déterminant

*Dans le plan :* Deux vecteurs du plan  $u$  et  $v$  sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

**Interprétation géométrique** Le déterminant de deux vecteurs  $u$  et  $v$  est l'aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.



## III — Droites

On se place dans le plan ou dans l'espace munis d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Définition 3.1 — Droite

*Dans le plan ou dans l'espace :* Soit  $A$  un point et un vecteur non nul. On appelle *droite* passant par  $A$  et dirigée par  $u$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire à  $u$ .

On notera cette droite  $D(A, u)$ .

**Équation paramétrique d'une droite dans le plan** Dans le plan ou dans l'espace : Soit  $A$  un point et  $u$  un vecteur non nul

$$M \in D(A, u) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{u}$$

**Dans le plan** : Si  $A(x_A, y_A)$  et  $u(x_u, y_u)$  alors

$$M(x, y) \in D(A, u) \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

**Dans l'espace** : Si  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $u(x_u, y_u, z_u)$  alors

$$M(x, y, z) \in D(A, u) \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \\ z = z_A + z_u t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

**Équation cartésienne d'une droite dans le plan** Dans le plan : La colinéarité de  $\overrightarrow{AM}$  et  $u(x_u, y_u)$  s'exprime à l'aide du déterminant

$$\begin{aligned} M(x, y) \in D(A, u) &\iff \det(\overrightarrow{AM}, u) = 0 \\ &\iff -y_u x + x_u y + y_y x_A - x_u y_A = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble  $D$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur directeur  $(-b, a)$ .

**Pente d'une droite non parallèle à  $(Oy)$**  Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des points  $M(x, y)$  vérifiant l'équation  $y = mx + p$  est une droite. On appelle  $m$  la **pente de la droite** et  $p$  son **ordonnée à l'origine**. La droite est dirigée par le vecteur  $(1, m)$  qui fait l'angle orienté  $\text{Arctan}(m)$  avec le vecteur  $(1, 0)$ .

Seule les droites non parallèles à  $(Oy)$  admettent une équation de la forme  $y = mx + p$ .

## IV — Plans

### Définition 4.1 — Plan

Soit  $A$  un point de l'espace et  $u$  et  $v$  deux vecteurs tels que  $(u, v)$  forment une famille libre. On appelle **plan passant par  $A$  et dirigé par  $(u, v)$**  l'ensemble des points  $M$  tel que  $(\overrightarrow{AM}, u, v)$  est liée.

On notera ce plan  $P(A, u, v)$ .

Une famille de vecteurs libres dirigeant  $P(A, u, v)$  est une *base* du plan  $P$ .

**Équation paramétrique d'un plan dans l'espace** Si  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $u(x_u, y_u, z_u)$  et  $v(x_v, y_v, z_v)$  alors

$$M(x, y, z) \in P(A, u, v) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda_1 u + \lambda_2 v$$

$$\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x_A + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v \\ y = y_A + \lambda_1 y_u + \lambda_2 y_v \\ z = z_A + \lambda_1 z_u + \lambda_2 z_v \end{cases}$$

**Théorème 4.2 — Vecteur normal à une droite, à un plan**

Soit  $A$  un point du plan ou de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul. L'ensemble des points  $M$  tels que  $AM$  est orthogonal à  $n$  est

- **Dans le plan** : une droite passant par  $A$  et dirigée par le vecteur  $(-b, a)$ .
- **Dans l'espace** : un plan passant par  $A$  et dirigé par deux vecteurs  $(u, v)$  orthogonaux à  $n$  et formant une famille libre.

**Dém.** En effet, la condition d'orthogonalité mène systématiquement à une équation cartésienne d'un des deux types déjà vu. □