Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

BCPST 1, 27/03/2018

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ sera qualifié de « plan », $\mathbb{R}^3$ d'« espace » et les éléments de ces ensembles de « vecteurs » ou « points » selon le contexte.*

I — Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace.

Définition 1.1 — Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan : *soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de u et v le réel*

$$u \cdot v \overset{\text{déf.}}{=} xx' + yy'$$

Dans l'espace : *soit $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de u et v le réel*

$$u \cdot v \overset{\text{déf.}}{=} xx' + yy' + zz'$$

Propriété 1.2 — Propriétés du produit scalaire

Dans le plan ou dans l'espace : *Soit u, v et w trois vecteurs, λ et μ deux scalaires*

1) $u \cdot v = v \cdot u$;
2) $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda \times u \cdot w + \mu \times v \cdot w$.

Définition 1.3 — Norme d'un vecteur

Dans le plan ou dans l'espace : *Soit u un vecteur. Le réel $u \cdot u$ est positif. On le nomme carré scalaire de u. Sa racine carrée est la norme de u*

$$\|u\| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La distance entre deux points A et B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB \overset{\text{déf.}}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Propriété 1.4 — Propriété de la norme
Dans le plan ou dans l'espace : *Soit u et v deux vecteurs et λ un scalaire.*

- $\|u\| = 0 \iff u = 0$;
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$;
- $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.5 — Orthogonalité de deux vecteurs
Dans le plan ou dans l'espace : *Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $u \cdot v = 0$.*

Propriété 1.6 — Liberté d'une famille orthogonale
Dans le plan ou dans l'espace : *Une famille de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre.*

La propriété précédente conduit à la notion de base orthonormée du plan, de l'espace.

Théorème 1.7 — Expression du produit scalaire dans une base orthonormée
Dans le plan ou dans l'espace : *L'expression du produit scalaire est la même dans toute base orthonormée.*

Application 1 — Cercle dans le plan
Soit Ω un point du plan et R un réel positif. On appelle cercle de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. L'équation cartésienne du cercle s'écrit dans un repère orthonormé quelconque

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Réciproque : laquelle de ces équations définit un cercle du plan ?

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 3 = 0$;
3. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$.

II — Déterminant de deux vecteurs du plan

Définition 2.1 — Vecteurs colinéaires
Dans le plan ou dans l'espace : *Deux vecteurs u et v sont colinéaires l'un à l'autre si et seulement si il existe un réel k tel que $u = kv$ ou $v = ku$.*
Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Définition 2.2 — Déterminant de deux vecteurs du plan

Dans le plan : *Soit $u(x,y) \in \mathbb{R}$ et $v(x',y') \in \mathbb{R}^2$. On appelle déterminant de u et v le scalaire*

$$\det(u,v) \overset{\text{déf.}}{=} xy' - x'y$$

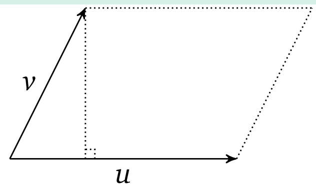
Théorème 2.3 — Expression du déterminant dans une base orthogonale

Dans le plan : *Le déterminant de deux vecteurs a la même expression dans toute base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.*

Théorème 2.4 — Colinéarité et déterminant

Dans le plan : *Deux vecteurs du plan u et v sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.*

Interprétation géométrique Le déterminant de deux vecteurs u et v est l'aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.



III — Droites

On se place dans le plan ou dans l'espace munis d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Définition 3.1 — Droite

Dans le plan ou dans l'espace : *Soit A un pointu un vecteur non nul. On appelle droite passant par A et dirigée par u l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à u.*
On notera cette droite $D(A,u)$.

Équation paramétrique d'une droite dans le plan **Dans le plan ou dans l'espace :** Soit A un point et u un vecteur non nul

$$M \in D(A,u) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$$

Dans le plan : Si $A(x_A, y_A)$ et $u(x_u, y_u)$ alors

$$M(x,y) \in D(A,u) \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Dans l'espace : Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $u(x_u, y_u, z_u)$ alors

$$M(x,y,z) \in D(A,u) \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \\ z = z_A + z_u t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Équation cartésienne d'une droite dans le plan **Dans le plan :** La colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $u(x_u, y_u)$ s'exprime à l'aide du déterminant

$$\begin{aligned} M(x,y) \in D(A,u) &\iff \det(\overrightarrow{AM}, u) = 0 \\ &\iff -y_u\, x + x_u\, y + y_y\, x_A - x_u\, y_A = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble D d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $(-b, a)$.

Pente d'une droite non parallèle à (Oy) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation $y = mx + p$ est une droite. On appelle m la pente de la droite et p son ordonnée à l'origine. La droite est dirigée par le vecteur $(1, m)$ qui fait l'angle orienté $\mathrm{Arctan}(m)$ avec le vecteur $(1, 0)$.
Seule les droites non parallèles à (Oy) admettent une équation de la forme $y = mx + p$.

IV — Plans

Définition 4.1 — Plan
Soit A un point de l'espace et u et v deux vecteurs tels que (u, v) forment une famille libre.
On appelle plan passant par A et dirigé par (u, v) l'ensemble des points M tel que $(\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée.
On notera ce plan $P(A, u, v)$.
Une famille de vecteurs libres dirigeant $P(A, u, v)$ est une base du plan P.

Équation paramétrique d'un plan dans l'espace Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $u(x_u, y_u, z_u)$ et $v(x_v, y_v, z_v)$ alors

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P(A,u,v) &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda_1 u + \lambda_2 v \\ &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x_A + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v \\ y = y_A + \lambda_1 y_u + \lambda_2 y_v \\ z = z_A + \lambda_1 z_u + \lambda_2 z_v \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 4.2 — Vecteur normal à une droite, à un plan
Soit A un point du plan ou de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que AM est orthogonal à n est

- ***Dans le plan :** une droite passant par A et dirigée par le vecteur $(-b, a)$.*

- ***Dans l'espace :*** *un plan passant par A et dirigé par deux vecteurs (u, v) orthogonaux à n et formant une famille libre.*

Dém. En effet, la condition d'orthogonalité mène systématiquement à une équation cartésienne d'un des deux types déjà vu. $\square$