

# FONCTIONS USUELLES

BCPST I, 27/03/2018

## I — Vocabulaire sur les fonctions

### Définition 1.1 — Fonction numérique

On appelle *fonction numérique* toute application d'une partie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Définition 1.2 — Domaine de définition

Soit une expression algébrique  $f(x)$  dépendant d'une variable  $x$ .

L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle le *domaine de définition*  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .

L'expression algébrique  $f(x)$  définit donc une fonction  $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ .

La donnée d'un ensemble de définition et d'une expression algébrique suffit donc à définir une fonction numérique.

**Exemple** L'expression  $x + \ln(x^2 - 1)$  a pour domaine de définition  $] -1 ; 1 [$ . Elle définit donc une fonction numérique sur cet intervalle.

**Attention !** Il est incorrect de parler de « la fonction  $\sin(x)$  ». En effet l'expression algébrique  $\sin(x)$  peut définir une fonction sur  $\mathbb{R}$ , une autre sur  $\mathbb{R}^*$ , etc.

En revanche, lorsqu'on parle de « la fonction  $\sin$  » il est clair que l'on parle de la fonction définie dans le cours sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

### Définition 1.4 — Opérations usuelles sur les fonctions

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions numériques. On définit

$$\begin{array}{l} \text{— le produit de } f \text{ par un scalaire } \lambda \\ \text{— la somme de } f \text{ et de } g \\ \text{— le produit de } f \text{ et de } g \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda f \\ f + g \\ f \times g \end{array} \quad : \quad \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{array}$$

Sur l'ensemble  $J = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$ , on peut définir l'*inverse de } f* par

$$1/f : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/f(x) \end{array}$$

Par utilisation de ces opérations de bases, on définit ensuite le rapport  $g/f$ , les puissances de  $f$ , etc.

### Définition 1.5 — Composée de deux fonctions

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$  qui prend ses valeurs dans un ensemble  $\mathcal{E}$  et  $g$  une fonction numérique de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On définit la *composée de  $f$  et  $g$*  notée  $g \circ f$  par

$$g \circ f : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

**Remarque I.1** Cette définition appelle plusieurs remarques importantes :

- Il est essentiel de s'assurer que  $f$  prend bien ses valeurs dans l'ensemble  $J$ , sans quoi il ne serait pas possible, ensuite, d'appliquer la fonction  $g$ .
- La composée  $g \circ f$  peut-être définie, mais pas la composée  $f \circ g$ . De plus, lorsque les deux composées sont définies, elles n'ont, en général, pas la même valeur.

**Exercice 1** Écrire les composées de deux fonctions, parmi les trois suivantes. Quels sont leurs domaines de définition ? Combien de fonctions différentes sont ainsi définies ?

$$f(x) = \exp(x) \quad g(x) = 2x + 1 \quad h(x) = \ln(x)$$

### Définition 1.6 — Fonctions et ordre

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$ .

–  $f$  est *majorée sur  $\mathcal{D}$*  si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq M$$

–  $f$  est *minorée sur  $\mathcal{D}$*  si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geq m$$

–  $f$  est *bornée sur  $\mathcal{D}$*  si et seulement si  $f$  est majorée et minorée sur  $\mathcal{D}$ .

–  $f$  est *croissante sur  $\mathcal{D}$*  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

–  $f$  est *strictement croissante sur  $\mathcal{D}$*  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

–  $f$  est *décroissante sur*  $\mathcal{D}$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

–  $f$  est *strictement décroissante sur*  $\mathcal{D}$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

–  $f$  est *monotone sur*  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $f$  est croissante sur  $\mathcal{D}$  ou décroissante sur  $\mathcal{D}$ .

–  $f$  est *strictement monotone sur*  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $f$  est strictement croissante sur  $\mathcal{D}$  ou strictement décroissante sur  $\mathcal{D}$ .

–  $f$  est *périodique de période*  $T$  sur  $\mathcal{D}$  si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \implies f(x + T) = f(x)$$

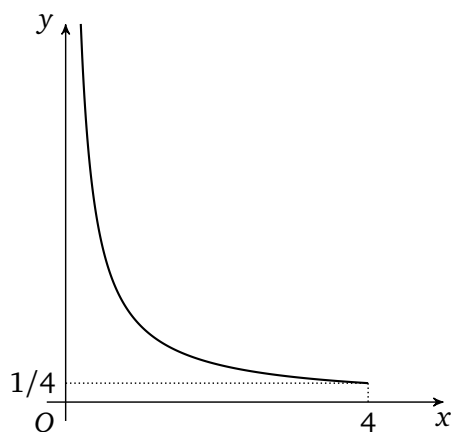


FIGURE I.1 — La fonction  $1/x$  est minorée, non majorée et décroissante sur l'intervalle  $]0; 4]$ .

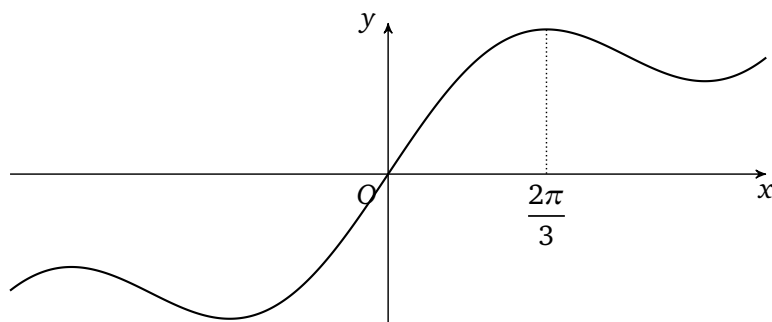


FIGURE I.2 — La fonction  $1/2x + \sin(x)$  est croissante sur  $[0; 2\pi/3]$ , mais n'est pas croissante sur  $\mathbb{R}$ . Elle est bornée sur cet intervalle, mais n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ .

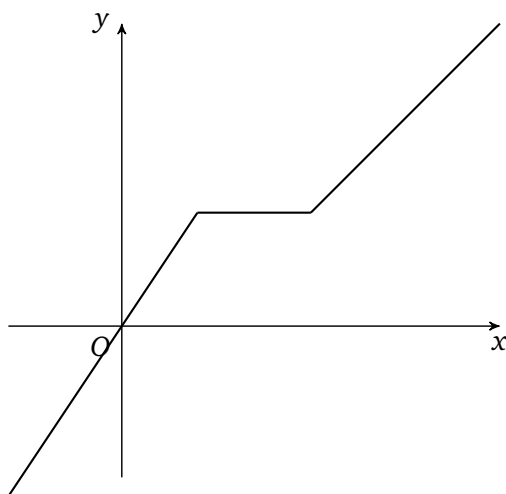


FIGURE I.3 — Exemple d'une fonction croissante mais pas strictement croissante (ici sur  $\mathbb{R}_+$ ).

### Propriété 1.7 — Caractérisation des fonctions bornées

Une fonction  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}$  est bornée si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leq C$$

DÉM. Le sens réciproque est immédiat :  $f$  est majorée par  $C$  et minorée par  $-C$ .

Montrons le sens direct. Soit  $f$  une fonction majorée par un réel  $M$  et minorée par  $m$  :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad m \leq f(x) \leq M$$

Posons  $C = \max(|M|, |m|)$ . On remarque alors que  $C \geq |M|$ , d'nc  $C \geq M$ . De plus,  $C \geq |m|$ , donc  $C \geq -m$  et ainsi  $-C \leq m$ . On a donc

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -C \leq m \leq f(x) \leq M \leq C$$

soit  $\forall x \in \mathcal{D}, \quad -C \leq f(x) \leq C$

donc  $\forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leq C$  □

## II — Fonctions monômes

### II.1 — Étude

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f_n$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$$

Tableau de variation et graphe

Cas  $n$  pair

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f_n$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

↘ ↗

Cas  $n$  impair

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	$+$
$f_n$	$-\infty$	$+\infty$

↗

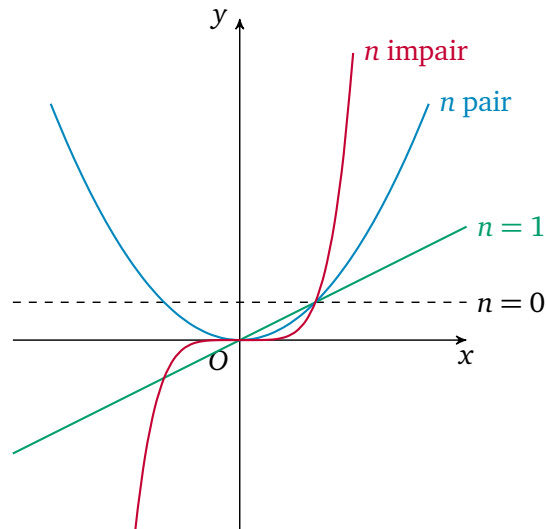


FIGURE I.4 — Graphe de  $x \mapsto x^n$

### II.2 — Étude des fonctions $x \mapsto x^{-n}$ , pour $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f_n$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n'(x) = -n \frac{1}{x^{n+1}}$$

Tableau de variation et graphe

Cas $n$ pair			Cas $n$ impair			
$x$	$-\infty$	$0$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-		$f'_n(x)$	-		+
$f_n$	$0$	$+\infty$	$f_n$	$0$	$+\infty$	$0$

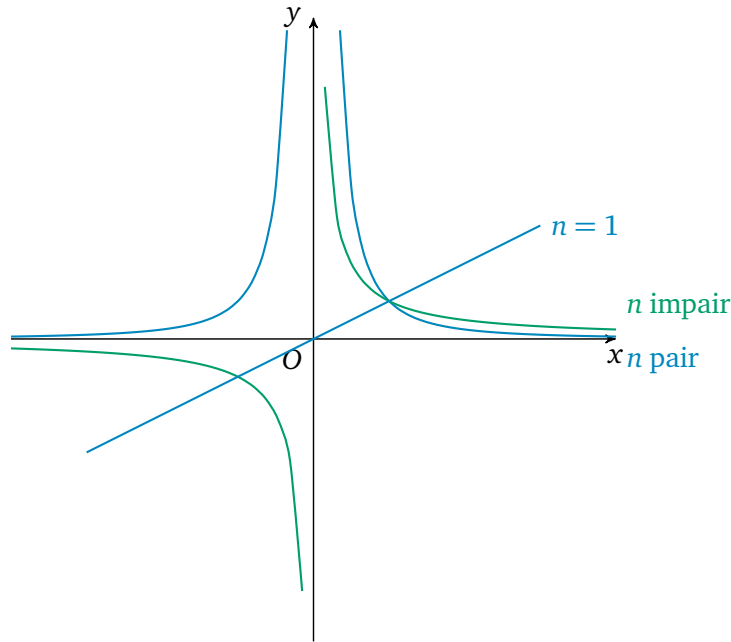


FIGURE I.5 — Graphe de  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$

### III — Racine carrée

#### III.1 — Définition

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Considérons l'équation  $x^2 = a$ . Comme la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue, et d'après son tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que cette équation

- n'a pas de solutions si  $a < 0$ ;
- admet comme unique solution  $x = 0$  si  $a = 0$ ;
- admet deux solutions si  $a > 0$ .

Dans le cas où  $a \geq 0$ , l'unique solution positive est notée  $\sqrt{a}$ , la racine carrée de  $a$ .

**Définition 3.1 — Racine carrée**

La fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Elle réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ . Sa bijection réciproque est la fonction *racine carrée*, définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$   $\sqrt{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ .

Ainsi lorsque  $a$  est positif,  $x^2 = a$  admet deux solutions  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ .

**Propriété 3.2 — Racine carrée**

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs. On a

- 1)  $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ ;
- 2) si  $x \neq 0$ ,  $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$ ;
- 3) pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$ ;

DÉM. Pour la première propriété, on a  $(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = xy$  et  $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$ . Par unicité de la racine carrée,  $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .

Les suivantes se montrent de même. □

**III.2 — Étude**

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ .

On vient de voir que cette fonction est correctement définie sur  $\mathbb{R}_+$ . On montrera qu'elle est continue sur cet intervalle.

Étudions son nombre dérivée en un point  $x \in \mathbb{R}_+$ , en calculant la limite du taux d'accroissement en  $x$ . Pour  $h \in ]-x ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} && \text{méthode de la quantité conjuguée} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0$  cette quantité tend vers  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Si  $x = 0$  elle tend vers  $+\infty$ .

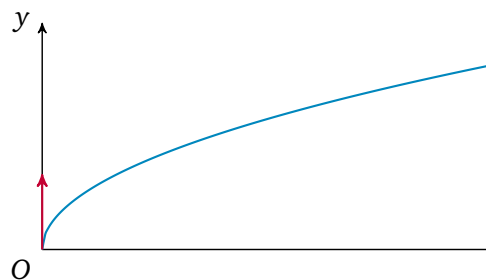
La fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*Tableau de variation et graphe*

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	0	$+\infty$

$\nearrow$

FIGURE I.6 — Graphe de  $x \mapsto \sqrt{x}$ 

## IV — Valeur absolue

**Définition 4.1 — Valeur absolue**

La fonction *valeur absolue* est définie par

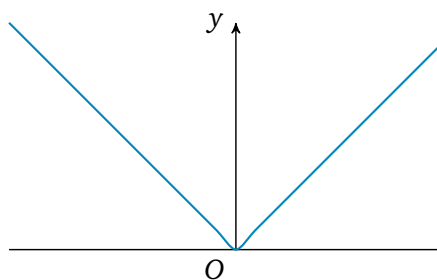
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*Étude*

Cette fonction est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et n'est pas dérivable en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx} (|x|) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{d}{dx} (|x|) = -1$$

ou bien  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{d}{dx} (|x|) = |x|/x$

FIGURE I.7 — Graphe de  $x \mapsto |x|$



## V — Logarithme népérien

### V.1 — Définition et propriété caractéristique

#### Définition 5.1 — Logarithme népérien

La fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est définie sur un intervalle et continue : elle admet une unique primitive s'annulant en 1. Cette primitive est la fonction **logarithme népérien**  $\ln$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Remarquer que c'est une définition « calculable » de  $\ln$  : l'intégrale peut être estimée à une précision quelconque, par exemple par la méthode des rectangles.

#### Théorème 5.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

DÉM. On fixe  $y$  et on dérive  $\ln(xy) - \ln x - \ln y$  par rapport à  $x$ . □

#### Corollaire 5.3 — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1/x) = -\ln x$

DÉM. En prenant  $y = 1/x$  dans le thm précédent. □

#### Corollaire 5.4 — $\forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n \ln(x)$

DÉM. Directement ou par récurrence sur  $n$ . □

#### Définition 5.5 — Logarithme de base $a$

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle **logarithme de base  $a$**  et on note  $\log_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier on a  $\log_a(a) = 1$ .

Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Elle hérite de ses propriétés opératoires, de régularité, etc. On note le logarithme de base 10 « Log ».

**Application — Nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier**

Soit  $n$  un entier ayant  $d$  chiffres dans son écriture décimale. On a donc  $10^{d-1} \leq n < 10^d$ . En prenant le Log,  $(d-1)\text{Log } 10 \leq \text{Log}(n) < d\text{Log}(10) \iff \lfloor \text{Log}(n) \rfloor + 1 = d$ . Le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de  $n$  est  $\lfloor \text{Log}(n) \rfloor + 1$ .

**Propriété 5.7 —**

- 1)  $\ln$  est une fonction continue et strictement croissante.
- 2)  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ;
- 3)  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ ;

DÉM.

- $\ln$  étant une primitive, elle est dérivable, donc continue. Elle est croissante car sa dérivée est positive.
- Admise au début de l'année. Sera démontrée dans le chapitre sur les limites de fonctions.
- Par changement de variable  $x = 1/x$  et usage de limite précédente. □

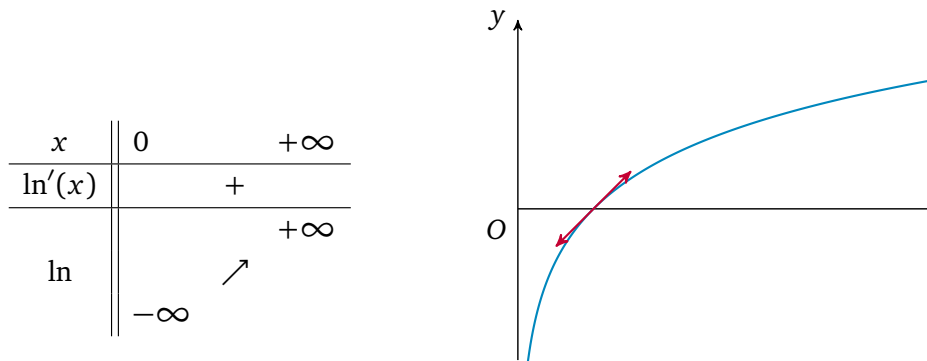
**Propriété 5.8 — Propriétés dite de « croissances comparées »**

- 1)  $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ;
- 2)  $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

DÉM.

- $\ln$  étant une primitive, elle est dérivable, donc continue. Elle est croissante car sa dérivée est positive.
- Admise au début de l'année. Sera démontrée dans le chapitre sur les limites de fonctions.
- Par changement de variable  $x = 1/x$  et usage de limite précédente.
- Par comparaison de  $1/t$  avec  $1/\sqrt{t}$  puis intégration (sur  $[1; +\infty[$ ).
- Par changement de variable  $X = 1/x$  sur la précédente. □

Tableau de variation et graphe

FIGURE I.8 — Graphe de  $\ln$ 

## VI — Exponentielle

### VI.1 — Définition et propriété caractéristique

#### Définition 6.1 — Exponentielle

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  étant continue et strictement croissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ , elle définit une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\ln \langle \mathbb{R}_+^* \rangle = \mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction *exponentielle*, noté *exp*.

#### Théorème 6.2 — Propriété caractéristique de l'exponentielle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

DÉM. En composant la propriété caractéristique de  $\ln$ , appliquée en  $e^x$  et  $e^y$ , par  $\exp$ . Ou en raisonnant par équivalence sur cette même propriété  $\square$

En posant  $e = \exp(1)$ , on peut alors noter  $\exp(x) = e^x$ . Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée. La fonction exponentielle peut être définie à partir du résultat suivant :

**Théorème 6.3** — *Il existe une unique fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable, telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .*

DÉM. L'unicité est simple à démontrer (en considérant la différence de deux solutions), mais l'existence est plutôt difficile.

Pour cela, on peut exhiber une solution, par exemple la bijection réciproque du logarithme.  $\square$

Mais on peut faire porter le regard un peu plus loin.

**Théorème 6.4** — Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , dérivable, telle que  $f' = mf$ , avec  $m \in \mathbb{C}$ . Alors

- 1) si  $f$  s'annule en un point alors elle est identiquement nulle,
- 2) sinon,  $f$  ne s'annule nulle part et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = f(0)^2$$

3)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

DÉM.

- on montre ce point et le suivant en démontrant que la fonction  $t \mapsto f(t)f(-t)$  est constante, en la dérivant.
- Si  $f$  est nulle, le troisième résultat est évident. Sinon on considère la fonction  $x \mapsto f(x+y)/(f(x)f(y))$  dont on démontre qu'elle est constante.  $\square$

Ainsi une telle fonction peut se noter  $\exp(mx)$ .

## VI.2 — Étude de la fonction $\exp$

**Propriété 6.5** — La fonction  $\exp$

- 1) est continue et strictement croissante;
- 2)  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ;
- 3) dérivable et égale à sa dérivée.

DÉM.

- 1) Se déduit du théorème de la bijection continue;
- 2) On dérive  $\exp(\ln y)$  qui donne  $\exp'(\ln y) = 1 = \exp(\ln(y))$ . Comme cela est vrai pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , on a (avec  $x = \ln y \in \mathbb{R}$ ),  $\exp'(x) = \exp(x)$ .  $\square$

**Propriété 6.6** — Propriétés dite « de croissances comparées »

- 1)  $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ;
- 2)  $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ .

DÉM.

- 1) Se déduit de  $\ln(X)/X \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  avec un changement de variable  $X = e^x$
- 2) Se déduit de  $X \ln(X) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  avec un changement de variable  $X = e^{-x}$ .  $\square$

Tableau de variation et graphe

$x$	$0$	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$
$\ln$	$-\infty$	$+\infty$

↗

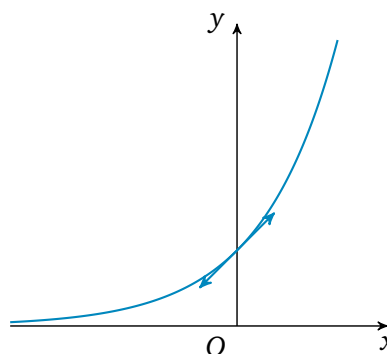


FIGURE I.9 — Graphe de exp

## VI.3 — Fonction puissance réelle

**Définition 6.7 — Fonction puissance**

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $x$  un réel quelconque. Alors par définition  $a^x = \exp(x \ln(a))$ .

On parle parfois d'exponentielle de base  $a$ .

**Propriété 6.8 —**

- 1) Pour  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $a^{x+y} = a^x a^y$  et  $a^{xy} = a^{x^y}$ .
- 2) Pour  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $x \in \mathbb{R}$  :  $(ab)^x = a^x b^x$ .

DÉM. Directement à partir de la définition  $\square$ 

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

Allure des courbes de  $x \mapsto a^x$ .

Si  $n$  est pair, la fonction  $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^n \end{array}$  est strictement croissante et surjective : elle

est donc bijective. Sa bijection réciproque s'appelle la **racine  $n$ -ième** et se note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ . On remarque alors que  $(x^{1/n})^n = x$ , ce qui justifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

De même, si  $n$  est impair, la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est bijective. Sa bijection réciproque s'appelle la **racine  $n$ -ième** et se note  $\sqrt[n]{\cdot}$ . On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

**Attention !** Notez qu'on ne peut pas appliquer de façon indifférente l'écriture  $x^{1/n}$  et l'écriture  $\sqrt[n]{x}$  :

- La première ne peut s'appliquer que si  $x$  est strictement positif ;
- la seconde s'applique si  $x$  est positif ou nul et même, dans le cas où  $n$  est impair pour un réel  $x$  quelconque.

## VII — Fonctions circulaires

### VII.1 — Définition de cosinus, sinus

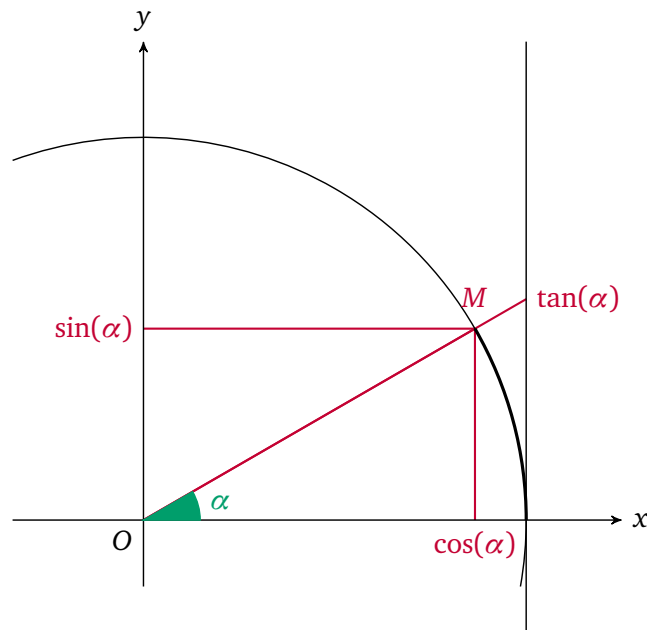


FIGURE I.10 — Définition des fonctions circulaires

#### Définition 7.1 — Fonctions circulaires

Considérons le plan  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $\alpha$  un nombre réel. On parcourt le cercle trigonométrique en partant du point  $A(1, 0)$  et en se déplaçant dans le sens trigonométrique (si  $\alpha \geq 0$ ) ou dans le sens contraire (si  $\alpha < 0$ ).

Lorsqu'on a parcouru la distance  $|\alpha|$ , on s'arrête en un point  $M$ .

Par définition, l'abscisse de  $M$  s'appelle le **cosinus** de  $\alpha$  (noté  $\cos(\alpha)$ ) et son ordonnée le **sinus** de  $\alpha$  (noté  $\sin(\alpha)$ ).

**Théorème 7.2** — Soit  $M$  un point du cercle trigonométrique. On appelle **angle orienté**  $\widehat{AOM}$  la portion du plan située entre les demi-droites  $[OA)$  et  $[OM)$ .

Il existe une infinité de réels  $\alpha$  permettant, par le procédé de construction précédent, de parvenir au point  $M$ . Ces réels s'appellent les **mesures de l'angle**  $\widehat{AOM}$ . Plus précisément, si  $\beta$  est l'une de ces mesures, alors pour toute mesure  $\alpha$  de l'angle  $\widehat{AOM}$  il existe un entier  $k$  tel que  $\alpha = \beta + 2k\pi$ .

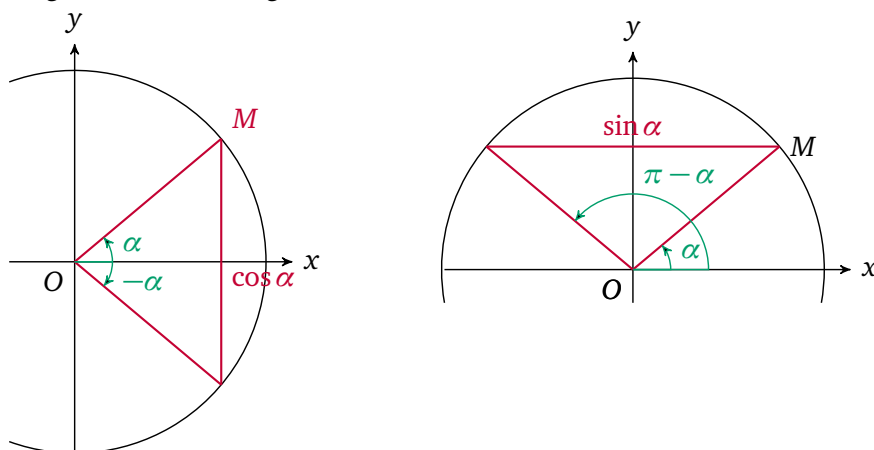
**Définition 7.3** — Un angle  $\widehat{AOM}$  étant donné, il existe une unique mesure de cet angle dans l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$ . On appelle ce réel **la mesure principale** de l'angle  $\widehat{AOM}$ .

### Équations trigonométriques

**Proposition 7.4** — Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) = \cos(\beta) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi && \text{ou} && \alpha = -\beta + 2k\pi \\ \sin(\alpha) = \sin(\beta) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi && \text{ou} && \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \\ \cos(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \sin(\beta) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi \end{aligned}$$

DÉM. En gros, il suffit de regarder sur les dessins... et de raisonner !



□

**Exemple A** Résoudre les équations d'inconnues réelles  $x$  :  $\cos x = 1$ ,  $\cos x = -1$ ,  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

**Définition 7.5** — Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
La *tangente* de  $\alpha$  est  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

*Relations dans un triangle rectangle*

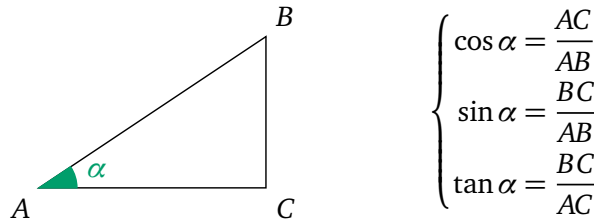


FIGURE I.11 — *Relations dans un triangle rectangle*

Soit un triangle  $(ABC)$  rectangle en  $B$ . Par une homothétie de rapport  $1/AC$  et de centre  $A$ , on peut s'assurer que la longueur de l'hypoténuse est 1. Par une rotation suivie d'une translation, on ramène alors le triangle dans le cercle trigonométrique. Il en résulte que  $\cos \alpha = AB/AC$  et  $\sin \alpha = BC/AC$ .

*Formulaire trigonométrique*

Il y a deux résultats fondamentaux, tous les autres s'en déduisent. D'abord, il faut connaître parfaitement les résultats géométriques suivants, qui se déduisent des définitions.

**Proposition 7.6** — Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

- 1)  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$  et  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$  (en considérant la symétrie d'axe  $(Ox)$ );
- 2)  $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$  et  $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$  (en considérant la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi/2$ );
- 3)  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$  et  $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$  (en considérant la symétrie d'axe  $(Oy)$ );

Ensuite une formule d'addition (une seule suffit !)

**Théorème 7.7** —  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ .

DÉM.

□

On en déduit ensuite tous le formulaire.



**Exemple B** Périodicité de tan

Graphes

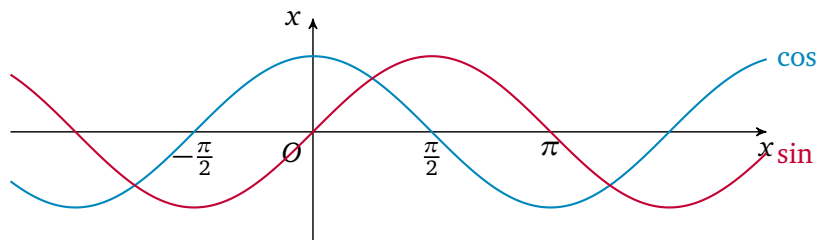


FIGURE I.12 — Graphes de sin et cos

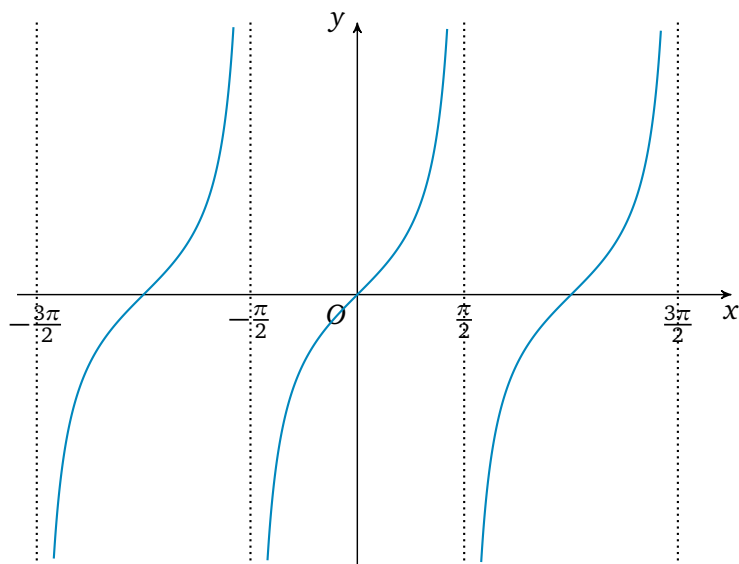


FIGURE I.13 — Graphe de tan

## VIII — Fonctions circulaires réciproques

**Définition 8.1** — arc-sinus

La fonction  $f : [-\pi/2 ; \pi/2] \rightarrow [-1 ; 1]$  est définie, continue et strictement croissante sur son intervalle de définition.

Elle définit donc une bijection de  $[-\pi/2 ; \pi/2]$  dans  $[-1 ; 1]$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arc-sinus**, notée **Arcsin**, définie sur  $[-1 ; 1]$  à valeurs dans  $[-\pi/2 ; \pi/2]$ .

Étude et graphe

La fonction Arcsin est continue et strictement croissante sur  $[-1 ; 1]$ . Elle est de plus dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  et

$$\forall x \in ] -1 ; 1 [, \quad \frac{d}{dx} (\text{Arcsin}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Elle n'est pas dérivable en  $-1$  et en  $1$ .

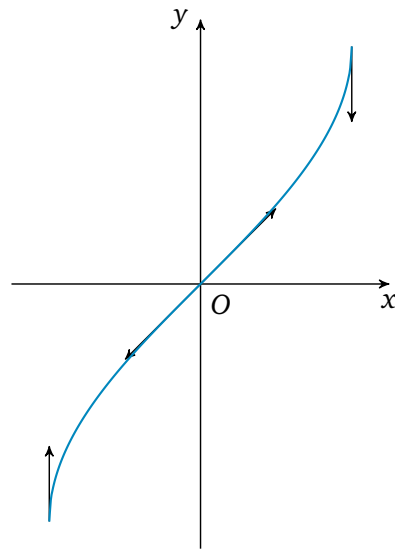


FIGURE I.14 — Graphe de Arcsin

$x$	$-1$	$0$	$1$
$\text{Arcsin}'(x)$		$+ 1 +$	
$\text{Arcsin}$		$0$	$\pi/2$
	$\nearrow$		$\nearrow$
	$-\pi/2$		

**Définition 8.2 — arc-cosinus**

La fonction  $f : [0 ; \pi] \rightarrow [-1 ; 1]$  est définie, continue et strictement décroissante sur son intervalle de définition.

$$x \mapsto \cos x$$

Elle définit donc une bijection de  $[0 ; \pi]$  dans  $[-1 ; 1]$ . Sa bijection réciproque est la fonction *arc-cosinus*, notée *Arccos*, définie sur  $[-1 ; 1]$  à valeurs dans  $[0 ; \pi]$ .

*Étude et graphe*

La fonction Arccos est continue et strictement décroissante sur  $[-1 ; 1]$ . Elle est de plus dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  et

$$\forall x \in ] -1 ; 1 [, \quad \frac{d}{dx} (\text{Arccos}(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Elle n'est pas dérivable en  $-1$  et en  $1$ .

$x$	$-1$	$0$	$1$
$\text{Arccos}'(x)$		$- 1 -$	
$\text{Arccos}$	$\pi$	$\pi/2$	$0$
		$\searrow$	$\searrow$

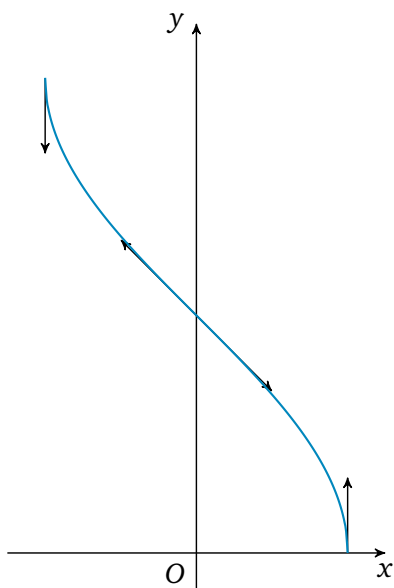


FIGURE I.15 — Graphe de Arccos

**Définition 8.3 — arc-tangente**

La fonction  $f : ]-\pi/2 ; \pi/2[ \longrightarrow \mathbb{R}$  est définie, continue et strictement croissante sur son intervalle de définition.

$$x \longmapsto \tan x$$

Elle définit donc une bijection de  $]-\pi/2 ; \pi/2[$  dans  $\mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction *arc-tangente*, notée *Arctan*, définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]-\pi/2 ; \pi/2[$ .

*Étude et graphe*

La fonction *Arctan* est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Elle est de plus dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} (\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{Arctan}'(x)$	$+$	$1$	$+$
$\text{Arctan}$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$

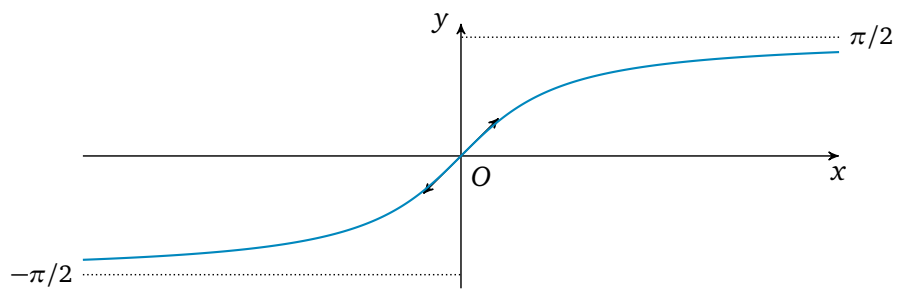


FIGURE I.16 — *Graphe de Arctan*

