Fonctions usuelles

BCPST 1 — 24 octobre 2017

I — Vocabulaire sur les fonctions

Définition 1.1 — Fonction numérique

On appelle fonction numérique toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 — Domaine de définition

Soit une expression algébrique $f(x)$ dépendant d'une variable x.

L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

L'expression algébrique $f(x)$ définit donc une fonction $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

La donnée d'un ensemble de définition et d'une expression algébrique suffit donc à définir une fonction numérique.

Exemple L'expression $x + \ln(x^2 - 1)$ a pour domaine de définition $]-1\,;1[$. Elle définit donc une fonction numérique sur cet intervalle.

Attention ! Il est incorrect de parler de « la fonction $\sin(x)$ ». En effet l'expression algébrique $\sin(x)$ peut définir une fonction sur $\mathbb{R}$, une autre sur $\mathbb{R}^*$, etc.

En revanche, lorsqu'on parle de « la fonction sin » il est clair que l'on parle de la fonction définie dans le cours sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 1.4 — Opérations usuelles sur les fonctions

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. On définit

— *le produit de f par un scalaire λ* $\quad \lambda f : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array} \right.$

— *la somme de f et de g* $\quad f+g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array} \right.$

— *le produit de f et de g* $\quad f \times g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\times g(x) \end{array} \right.$

Sur l'ensemble $J = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$, on peut définir l'inverse de f par

$$1/f \; : \left| \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/f(x) \end{array} \right.$$

Par utilisation de ces opérations de bases, on définit ensuite le rapport g/f, les puissances de f, etc.

Définition 1.5 — Composée de deux fonctions

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ qui prend ses valeurs dans un ensemble $\mathscr{E}$ et g une fonction numérique de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit la composée de f et g notée $g \circ f$ par

$$g \circ f \; : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

Remarque I.1 Cette définition appelle plusieurs remarques importantes :

- Il est essentielle de s'assurer que f prend bien ses valeurs dans l'ensemble J, sans quoi il ne serait pas possible, ensuite, d'appliquer la fonction g.
- La composée $g \circ f$ peut-être définie, mais pas la composée $f \circ g$. De plus, lorsque les deux composées sont définies, elles n'ont, en général, pas la même valeur.

Exercice 1 Écrire les composées de deux fonctions, parmi les trois suivantes. Quels sont leurs domaines de définition ? Combien de fonctions différentes sont ainsi définies ?

$$f(x) = \exp(x) \qquad g(x) = 2x+1 \qquad h(x) = \ln(x)$$

Définition 1.6 — Fonctions et ordre

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

– *f est majorée sur $\mathscr{D}$ si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant M$$

- f est *minorée sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant m$$

- f est *bornée sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est majorée et minorée sur $\mathscr{D}$.
- f est *croissante sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$

- f est *strictement croissante sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

- f est *décroissante sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

- f est *strictement décroissante sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)$$

- f est *monotone sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est croissante sur $\mathscr{D}$ ou décroissante sur $\mathscr{D}$.
- f est *strictement monotone sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ ou strictement décroissante sur $\mathscr{D}$.
- f est *périodique de période T sur $\mathscr{D}$* si et seulement si

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad x + T \in \mathscr{D} \quad \Longrightarrow \quad f(x+T) = f(x)$$

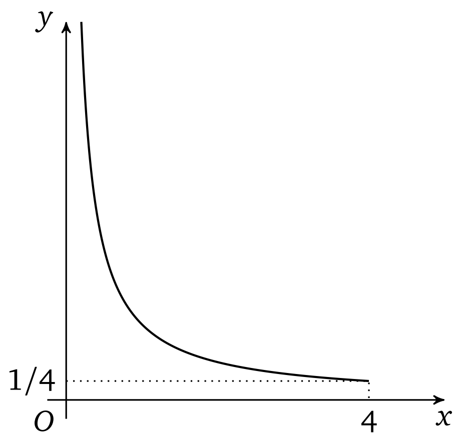


FIGURE I.1 — *La fonction $1/x$ est minorée, non majorée et décroissante sur l'intervalle* $]\,0\,;4\,]$.

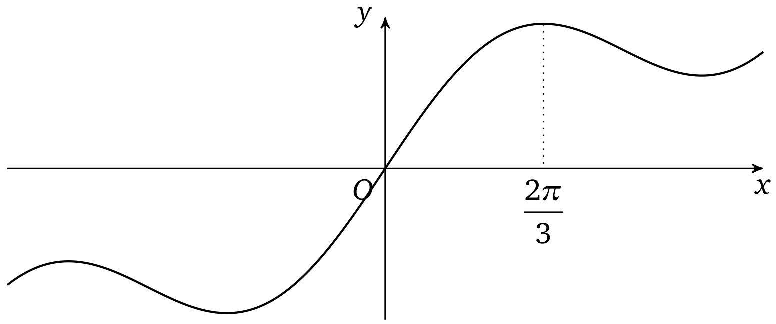


FIGURE I.2 — *La fonction* $1/2x + \sin(x)$ *est croissante sur* $[\,0\,;\,2\pi/3\,]$*, mais n'est pas croissante sur* $\mathbb{R}$*. Elle est bornée sur cet intervalle, mais n'est pas bornée sur* $\mathbb{R}$*.*

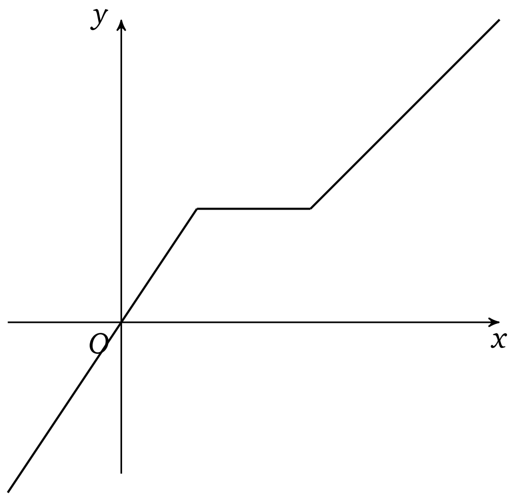


FIGURE I.3 — *Exemple d'une fonction croissante mais pas strictement croissante (ici sur* $\mathbb{R}_+$*).*

Propriété 1.7 — Caractérisation des fonctions bornées

Une fonction $f\ :\ \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie sur une partie* $\mathscr{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *est bornée si et seulement si*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |f(x)| \leqslant C$$

Dém. Le sens réciproque est immédiat : f est majorée par C et minorée par $-C$.
Montrons le sens direct. Soit f une fonction majorée par un réel M et minorée par m :

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Posons $C = max(|(|M), |(|m))$. On remarque alors que $C \geqslant |M|$, dpnc $C \geqslant M$. De plus, $C \geqslant |m|$, donc $C \geqslant -m$ et ainsi $-C \leqslant m$. On a donc

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad -C \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant C$$

soit
$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad -C \leqslant f(x) \leqslant C$$

donc
$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad |f(x)| \leqslant C$$
□

II — Fonctions monômes

II.1 — Étude

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n \; : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array} \right.$. La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = nx^{n-1}$$

Tableau de variation et graphe

Cas *n* pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas *n* impair

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

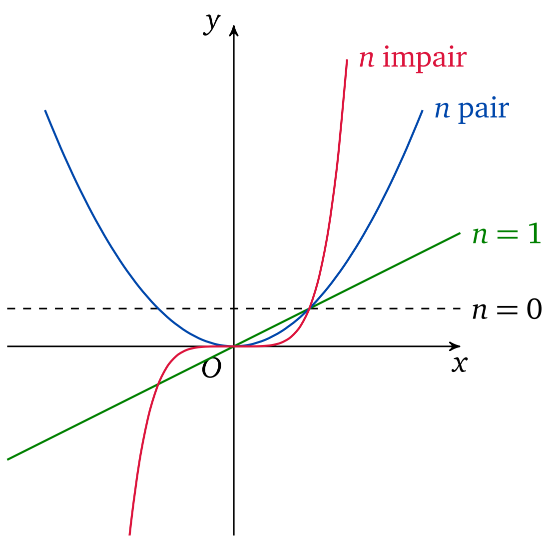


FIGURE I.4 — *Graphe de $x \mapsto x^n$*

II.2 — Étude des fonctions $x \mapsto x^{-n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^n} \end{array} \right.$. La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f_n'(x) = -n\frac{1}{x^{n+1}}$$

Tableau de variation et graphe

Cas n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	‖	$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Cas n impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	‖	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

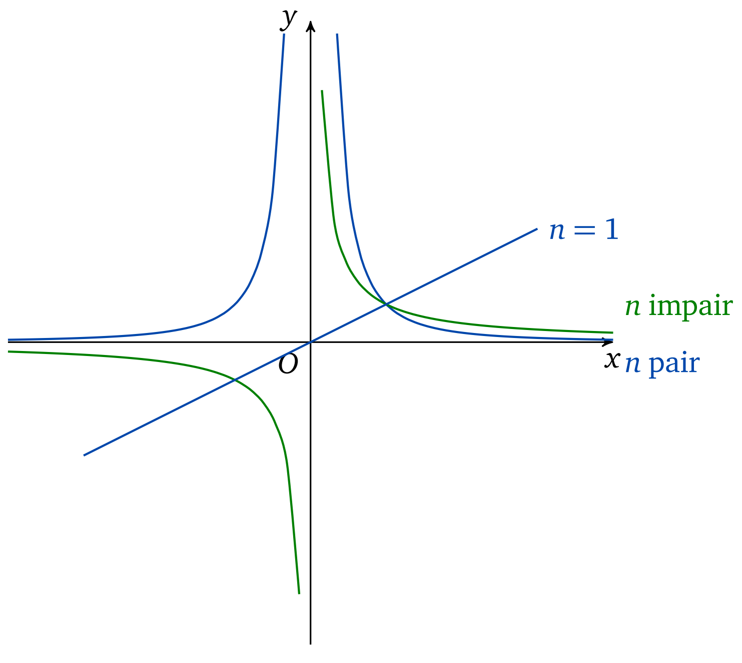


FIGURE I.5 — *Graphe de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$

III — Racine carrée

III.1 — Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation $x^2 = a$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue, et d'après son tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que cette équation

- n'a pas de solutions si $a < 0$;
- admet comme unique solution $x = 0$ si $a = 0$;
- admet deux solutions si $a > 0$.

Dans le cas où $a \geqslant 0$, l'unique solution positive est notée $\sqrt{a}$, la racine carrée de a.

Définition 3.1 — Racine carrée

La fonction $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ *dans* $f\left\langle \mathbb{R}_+ \right\rangle = \mathbb{R}_+$. *Sa bijection réciproque est la fonction racine carrée, définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$ $\sqrt{\cdot} \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.

Ainsi lorsque a est positif, $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Propriété 3.2 — Racine carrée

Soit x et y deux réels positifs. On a

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2) *si* $x \neq 0$, $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$;
3) *pour* $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$;

Dém. Pour la première propriété, on a $\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 = xy$ et $\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$. Par unicité de la racine carrée, $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

Les suivantes se montrent de même. □

III.2 — Étude

Soit $f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.

On vient de voir que cette fonction est correctement définie sur $\mathbb{R}_+$. On montrera qu'elle est continue sur cet intervalle.

Étudions son nombre dérivée en un point $x \in \mathbb{R}_+$, en calculant la limite du taux d'accroissement en x. Pour $h \in \left]-x\ ;\ +\infty\right[$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{h})h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

méthode de la quantité conjuguée

Si $x \neq 0$ cette quantité tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $x = 0$ elle tend vers $+\infty$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

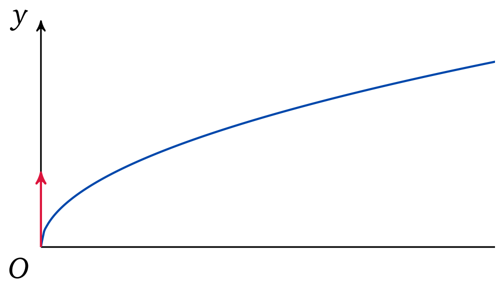


FIGURE I.6 — *Graphe de* $x \mapsto \sqrt{x}$

IV — Valeur absolue

Définition 4.1 — Valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$\text{et} \quad |x| \overset{\text{déf.}}{=} -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Étude

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = -1$$

ou bien $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = |x|/x$$

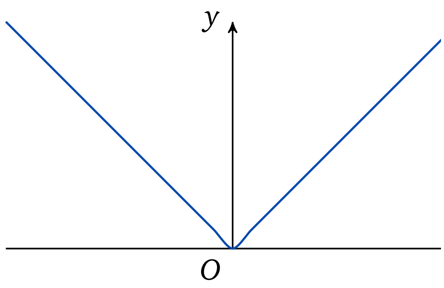


FIGURE I.7 — *Graphe de* $x \mapsto |x|$

V — Logarithme népérien

V.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 5.1 — Logarithme népérien

La fonction $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x \end{array}$ *est définie sur un intervalle et continue : elle admet une unique primitive s'annulant en* 1*. Cette primitive est la fonction logarithme népérien* ln

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Remarquer que c'est une définition « calculable » de ln : l'intégrale peut être estimée à une précision quelconque, par exemple par la méthode des rectangles.

Théorème 5.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Dém. On fixe y et on dérive $\ln(xy) - \ln x - \ln y$ par rapport à x. □

Corollaire 5.3 — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1/x) = -\ln x$

Dém. En prenant $y = 1/x$ dans le thm précédent. □

Corollaire 5.4 — $\forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n \ln(x)$

Dém. Directement ou par récurrence sur n. □

Définition 5.5 — Logarithme de base *a*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle logarithme de base a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier on a $\log_a(a) = 1$.

Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Elle hérite de ses propriétés opératoires, de régularité, etc. On note le logarithme de base 10 « Log ».

Application — Nombre de chiffres dans l'écriture décimal d'un entier

Soit n un entier ayant d chiffres dans son écriture décimale. On a donc $10^{d-1} \leqslant n < 10^d$. En prenant le Log, $(d-1)\operatorname{Log} 10 \leqslant \operatorname{Log}(n) < d \operatorname{Log}(10) \iff \lfloor \operatorname{Log}(n) \rfloor + 1 = d$. Le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de n est $\lfloor \operatorname{Log}(n) \rfloor + 1$.

Propriété 5.7 —

1) $\ln$ *est une fonction continue et strictement croissante.*
2) $\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$;
3) $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$;

Dém.

- $\ln$ étant une primitive, elle est dérivable, donc continue. Elle est croissante car sa dérivée est positive.

- Admise au début de l'année. Sera démontrée dans le chapitre sur les limites de fonctions.
- Par changement de variable $x = 1/x$ et usage de limite précédente. $\square$

Propriété 5.8 — Propriétés dite de « croissances comparées »

1) $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;

2) $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Dém.

- ln étant une primitive, elle est dérivable, donc continue. Elle est croissante car sa dérivée est positive.
- Admise au début de l'année. Sera démontrée dans le chapitre sur les limites de fonctions.
- Par changement de variable $x = 1/x$ et usage de limite précédente.
- Par comparaison de $1/t$ avec $1/\sqrt{t}$ puis intégration (sur $[1\,;\,+\infty[$).
- Par changement de variable $X = 1/x$ sur la précédente. $\square$

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

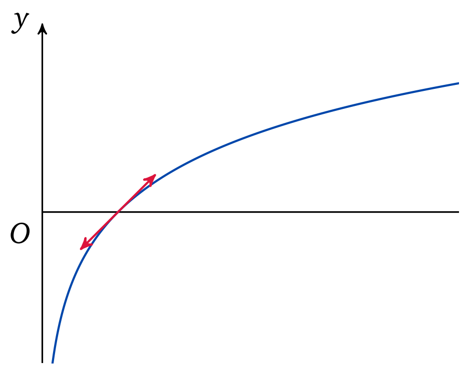


FIGURE I.8 — *Graphe de* ln

VI — Exponentielle

VI.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 6.1 — Exponentielle

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\ln\left\langle \mathbb{R}_+^* \right\rangle = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle, noté $\exp$.

Théorème 6.2 — Propriété caractéristique de l'exponentielle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Dém. En composant la propriété caractéristique de ln, appliquée en e^x et e^y, par exp. Ou en raisonnant par équivalence sur cette même propriété □

En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on peut alors noter $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée.

La fonction exponentielle peut être définie à partir du résultat suivant :

Théorème — *Il existe une unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Dém. L'unicité est simple à démontrer (en considérant la différence de deux solutions), mais l'existence est plutôt difficile.

Pour cela, on peut exhiber une solution, par exemple la bijection réciproque du logarithme. □

Mais on peut faire porter le regard un peu plus loin.

Théorème — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dérivable, telle que $f' = mf$, avec $m \in \mathbb{C}$. Alors*

1) *si f s'annule en un point alors elle est identiquement nulle,*
2) *sinon, f ne s'annule nulle part et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = f(0)^2$$

3)
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Dém.

– on montre ce point et le suivant en démontrant que la fonction $t \mapsto f(t)f(-t)$ est constante, en la dérivant.
– Si f est nulle, le troisième résultat est évident. Sinon on considère la fonction $x \mapsto f(x+y)/(f(x)f(y))$ dont on démontre qu'elle est constante. □

Ainsi une telle fonction peut se noter $\exp(mx)$.

VI.2 — Étude de la fonction exp

Propriété 6.5 — *La fonction* exp

1) *est continue et strictement croissante ;*
2) $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$*;*
3) *dérivable et égale à sa dérivée.*

Dém.

1) Se déduit du théorème de la bijection continue ;
2) On dérive $\exp(\ln y)$ qui donne $\exp'(\ln y) = 1 = \exp(\ln(y))$. Comme cela est vrai pour tout y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a (avec $x = \ln y \in \mathbb{R}$), $\exp'(x) = \exp(x)$. □

Propriété 6.6 — **Propriétés dite « de croissances comparées »**

1) $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$*;*
2) $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$

Dém.

1) Se déduit de $\ln(X)/X \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ avec un changement de variable $X = e^x$
2) Se déduit de $X\ln(X) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ avec un changement de variable $X = e^{-x}$. □

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	||	$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

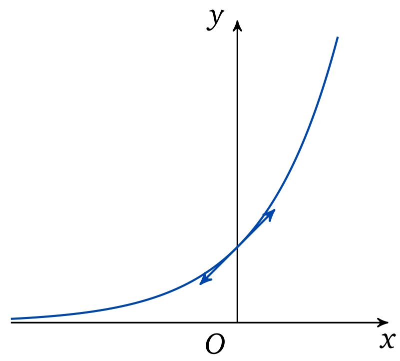


FIGURE I.9 — *Graphe de* exp

VI.3 — Fonction puissance réelle

Définition 6.7 — Fonction puissance

Soit a un réel strictement positif et x un réel quelconque. Alors par définition $a^x = \exp(x\ln(a))$.

On parle parfois d'exponentielle de base a.

Propriété 6.8 —

1) *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $a^{x+y} = a^x a^y$ *et* $a^{xy} = a^{xy}$.
2) *Pour* $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *et* $x \in \mathbb{R}$: $(ab)^x = a^x b^x$.

Dém. Directement à partir de la définition □

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

Allure des courbes de $x \mapsto a^x$.

Si n est pair, la fonction $: \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.$ est strictement croissante et surjective : elle est donc bijective. Sa bijection réciproque s'appelle la racine n–ième et se note $\sqrt[n]{\ }$. On remarque alors que $\left(x^{1/n}\right)^n = x$, ce qui justifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

De même, si n est impair, la fonction $: \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.$ est bijective. Sa bijection réciproque s'appelle la racine n–ième et se note $\sqrt[n]{\ }$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Attention ! Notez qu'on ne peut pas appliquer de façon indifférente l'écriture $x^{1/n}$ et l'écriture $\sqrt[n]{x}$:

- La première ne peut s'appliquer que si x *est strictement positif* ;
- la seconde s'applique si x *est positif ou nul* et même, *dans le cas où n est impair pour un réel x quelconque*.

VII — Fonctions circulaires

VII.1 — Définition de cosinus, sinus

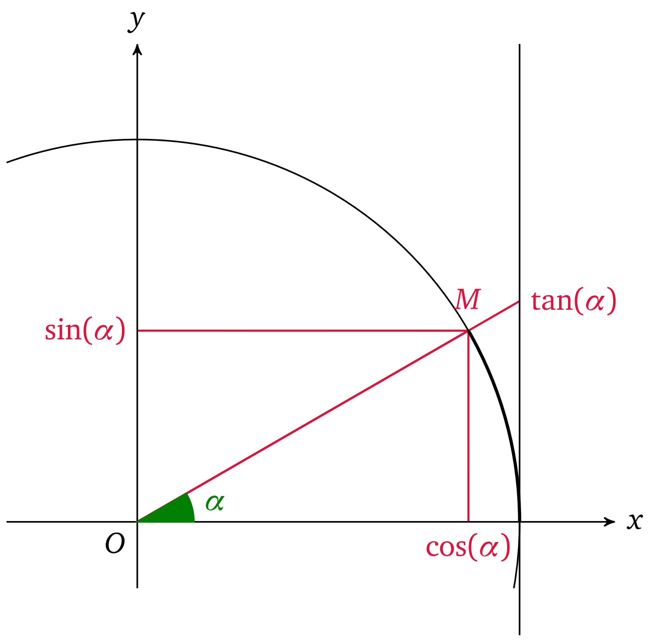


FIGURE I.10 — *Définition des fonctions circulaires*

Définition 7.1 — Fonctions circulaires

Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Soit α un nombre réel. On parcourt le cercle trigonométrique en partant du point $A(1,0)$ et en se déplaçant dans le sens trigonométrique (si $\alpha \geqslant 0$) ou dans le sens contraire (si $\alpha < 0$). Lorsqu'on a parcouru la distance $|\alpha|$, on s'arrête en un point M.

Par définition, l'abcisse de M s'appelle le cosinus *de α (noté $\cos(\alpha)$) et son ordonnée le* sinus *de α (noté $\sin(\alpha)$).*

Théorème 7.2 — *Soit M un point du cercle trigonométrique. On appelle angle orienté $\widehat{AOM}$ la portion du plan située entre les demi-droites $[OA)$ et $[OM)$.*

Il existe une infinité de réels α permettant, par le procédé de construction précédent, de parvenir au point M. Ces réels s'appellent les mesures de l'angle $\widehat{AOM}$. Plus précisément, si β est l'une de ces mesures, alors pour toute mesure α de l'angle $\widehat{AOM}$ il existe un entier k tel que $\alpha = \beta + 2k\pi$.

Définition 7.3 — *Un angle $\widehat{AOM}$ étant donné, il existe une unique mesure de cet angle dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. On appelle ce réel la mesure principale de l'angle $\widehat{AOM}$.*

Équations trigonométriques

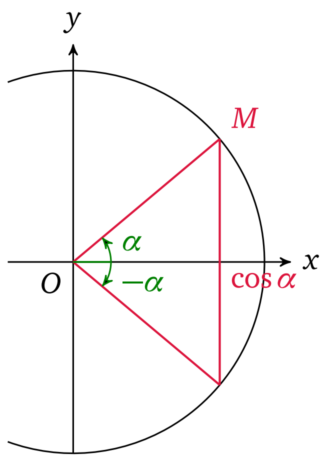
Proposition 7.4 — *Soit α et β deux réels.*

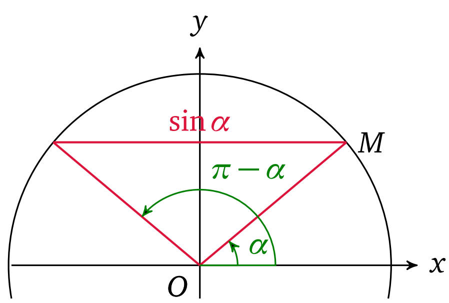
$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \beta + 2$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \sin(\beta) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \alpha = \beta + 2k\pi$$

Dém. En gros, il suffit de regarder sur les dessins... et de raisonner !





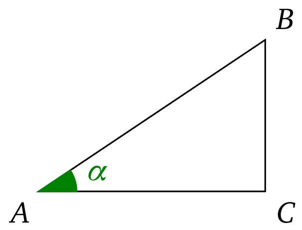
□

Exemple A Résoudre les équations d'inconnues réelles x : $\cos x = 1$, $\cos x = -1$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Définition 7.5 — *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

La tangente de α est $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Relations dans un triangle rectangle



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} \\ \tan\alpha = \dfrac{BC}{AC} \end{cases}$$

FIGURE I.11 — *Relations dans un triangle rectangle*

Soit un triangle (ABC) rectangle en B. Par une homotéthie de rapport $1/AC$ et de centre A, on peut s'assurer que la longueur de l'hypothénuse est 1. Par une rotation suivie d'une translation, on ramène alors le triangle dans le cercle trigonométrique. Il en résulte que $\cos\alpha = AB/AC$ et $\sin\alpha = BC/AC$.

Formulaire trigonométrique

Il y a deux résultats fondamentaux, tous les autres s'en déduisent. D'abord, il faut connaître parfaitement les résultats géométriques suivants, qui se déduisent des définitions.

Proposition 7.6 — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *et* $\sin(-\alpha) = \sin(\alpha)$ *(en considérant la symétrie d'axe (Ox)) ;*
2) $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$ *et* $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos(\alpha)$ *(en considérant la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$) ;*
3) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$ *et* $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$ *(en considérant la symétrie d'axe (Oy)) ;*

Ensuite une formule d'addition (une seule suffit !)

Théorème 7.7 — $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha).$

Dém.

□

On en déduit ensuite tous le formulaire.

Exemple B Périodicité de tan

Graphes

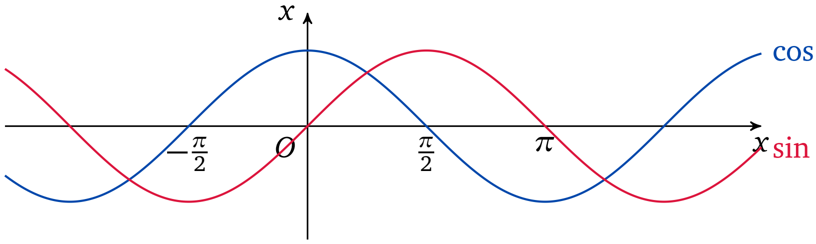


FIGURE I.12 — *Graphes de* sin *et* cos

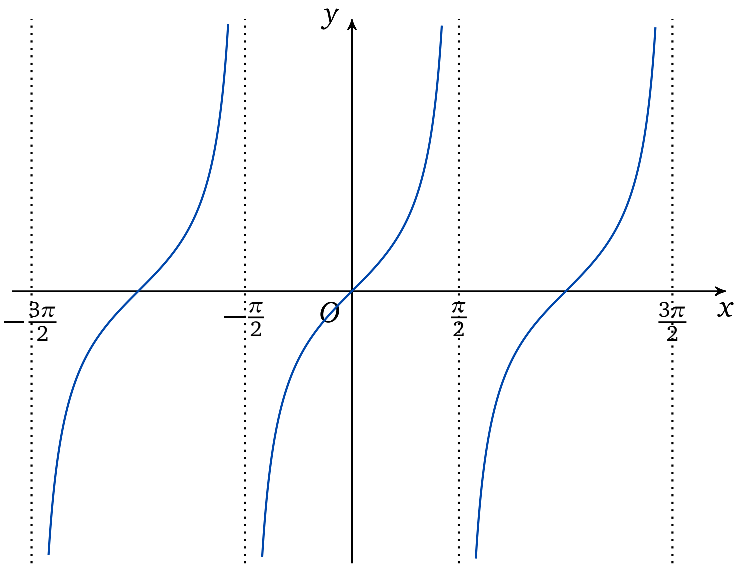


FIGURE I.13 — *Graphe de* tan

VIII — Fonctions circulaires réciproques

Définition 8.1 — arc-sinus

La fonction $f \quad : \left| \begin{array}{rcl} [-\pi/2 \,;\, \pi/2\,] & \longrightarrow & [-1 \,;\, 1\,] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ *est définie, continue et strictement croissante sur son intervalle de définition.*

Elle définit donc une bijection de $[-pi/20\,;\pi/2\,]$ *dans* $[-1\,;1\,]$*. Sa bijection réciproque est la fonction* *arc-sinus, notée* Arcsin*, définie sur* $[-1\,;1\,]$ *à valeurs dans* $[-\pi/2\,;\pi/2\,]$.

Étude et graphe

La fonction Arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1\,;1\,]$. Elle est de plus dérivable sur $]-1\,;1\,[$ et

$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Arcsin}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Elle n'est pas dérivable en -1 et en 1.

x	-1		0		1
$\operatorname{Arcsin}'(x)$	‖	$+$	1	$+$	‖
Arcsin	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

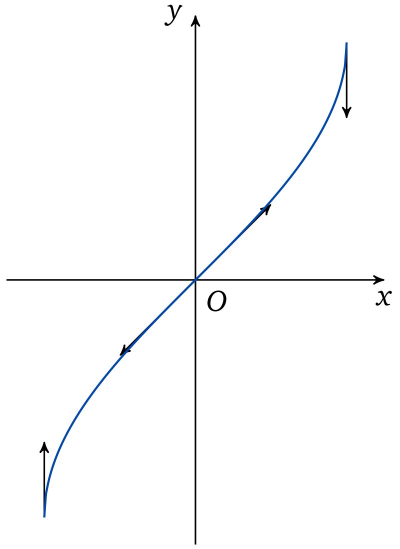


FIGURE I.14 — *Graphe de* Arcsin

Définition 8.2 — arc-cosinus

La fonction $f : \left|\begin{array}{rcl} [\,0\,;\pi\,] & \longrightarrow & [-1\,;1\,] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}\right.$ *est définie, continue et strictement décroissante sur son intervalle de définition.*

Elle définit donc une bijection de $[\,0\,;\pi\,]$ *dans* $[-1\,;1\,]$*. Sa bijection réciproque est la fonction arc-cosinus, notée* Arccos*, définie sur* $[-1\,;1\,]$ *à valeurs dans* $[\,0\,;\pi\,]$.

Étude et graphe

La fonction Arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1\,;1\,]$. Elle est de plus dérivable sur $]-1\,;1\,[$ et

$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Arccos}(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Elle n'est pas dérivable en -1 et en 1.

x	-1		0		1
$\mathrm{Arccos}'(x)$	$\|$	$-$	-1	$-$	$\|$
Arccos	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

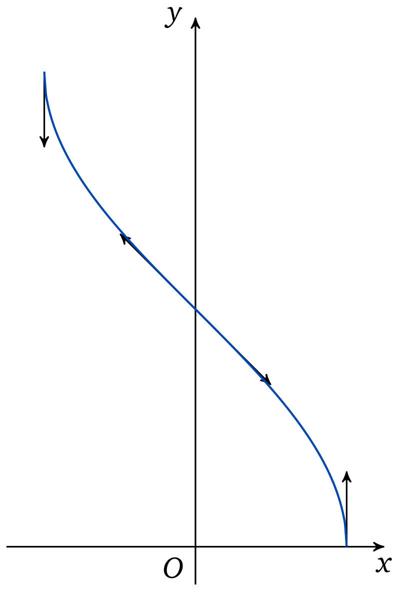


FIGURE I.15 — *Graphe de* Arccos

> **Définition 8.3 — arc-tangente**
>
> *La fonction* $f\ :\ \left|\begin{array}{rcl}[-pi/2\,;\,\pi/2\,] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \tan x\end{array}\right.$ *est définie, continue et strictement croissante sur son intervalle de définition.*
>
> *Elle définit donc une bijection de* $[-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque est la fonction* arc-tangente, *notée* Arctan, *définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $[-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$.

Étude et graphe

La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{Arctan}'(x)$		$+$	1	$+$	
Arctan	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

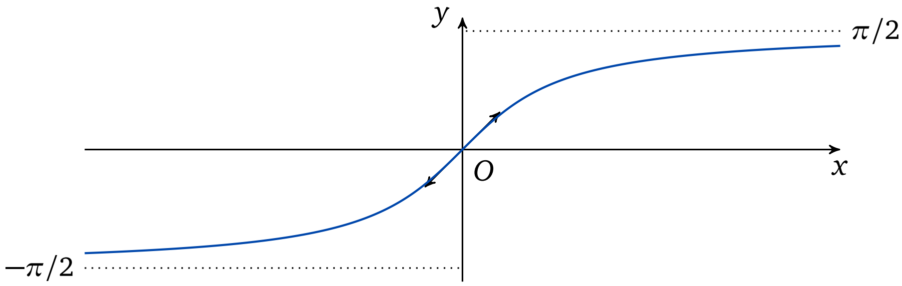


FIGURE I.16 — *Graphe de* Arctan