Espaces vectoriels

BCPST I — 14 septembre 2017

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

La somme de deux objets peut être définie dans de nombreux contextes : réels, complexes, vecteurs du plan ou de l'espace, fonctions, suites, etc. De même, pour le produit d'un de ces objets par un scalaire.

L'idée essentielle de l'Algèbre Linéaire (la branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels) consiste à étudier les opérations indépendamment des objets concernés. Ce qui est important c'est la combinaison linéaire en elle-même et pas les fonctions, les matrices ou les vecteurs concernés.

De ce fait, l'intuition géométrique que l'on développe dans des espaces vectoriels « simples » (comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) permet d'établir des résultats dans des espaces plus complexes.

I — Espaces vectoriels

I.1 — Opération interne et externe

Avant d'entrer dans le vif du sujet, voyons dans quel contexte les espaces vectoriels apparaissent.

Définition 1.1 — *Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne toute application de $E \times E$ dans E.*

Cette définition ne prend son intérêt que si l'opération possède des propriétés supplémentaires telles que l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre etc. L'Algèbre est la branche des mathématiques qui étudie les opérations sur un ensemble E.

Exemple

– l'**addition** et la **multiplication** des réels sont des lois de compositions internes sur $\mathbb{R}$. Du fait de leurs propriétés (que nous avons vu dans le chapitre sur les réels), l'ensemble $\mathbb{R}$ est qualifié de corps. Comme $\mathbb{C}$ peut-être muni d'opérations ayant les même propriétés, on dit également que $\mathbb{C}$ est un corps (tout comme $\mathbb{Q}$ d'ailleurs).

– La **division** n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$: elle n'y est pas définie puisqu'on ne peut pas diviser par 0.
En revanche la division est une opération sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'y est pas associative: par exemple $(6/4)/2 \neq 6/(4/2)$.

Définition 1.3 — *Soit E et K deux ensembles. On appelle loi de composition externe toute application de $K \times E$ dans E.*

Exemple

– Prenons pour E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et posons $K = \mathbb{R}$. Si f est fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on définit $\lambda . f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right.$. Cette opération est bien une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur E.
– idem avec le produit d'une suite, d'une matrice, etc. par un scalaire.

Attention ! On notera que *stricto sensu* la notation $f . \lambda$ est incorrecte. Selon sa définition, la loi de composition externe doit opérer à gauche, et pas à droite. Mais nous allons voir qu'en pratique cette distinction n'a pas beaucoup d'importance.

I.2 — Espace vectoriel

Définition 1.5 — Espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

Soit E un ensemble. On dit que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes

1) E est non vide;

2) on peut définir dans E une loi de composition interne notée $+$, appelée addition vectorielle, telle que

$$\begin{array}{lcr}
\forall (x,y,z) \in E^3, & x+(y+z) = (x+y)+z & \textit{associativité} \\
\forall (x,y) \in E^2, & x+y = y+x & \textit{commutativité} \\
\exists e \in E,\ \ \forall x \in E, & x+e = x & \textit{existence d'un élément neutre} \\
\forall x \in E,\ \ \exists x' \in E, & x+x' = e & \textit{existence d'un opposé}
\end{array}$$

3) on peut définir dans E une loi externe sur $\mathbb{K}$, notée ., appelée multiplication par un scalaire, telle que

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in E, & 1 \,.\, x = x \\
\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \;\; \forall x \in E, & (\lambda+\mu) \,.\, x = \lambda \,.\, x + \mu \,.\, x \\
\forall \lambda \in \mathbb{K}, \;\; \forall(x,y) \in E^2, & \lambda \,.\, (x+y) = \lambda \,.\, x + \mu \,.\, y \\
\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \;\; \forall x \in E, & \lambda \,.\, (\mu \,.\, x) = (\lambda \times \mu) \,.\, x
\end{array}$$

Pourquoi ce nom d'espace vectoriel ? Parce que nous retrouvons exactement les propriétés du calcul vectoriel.

La somme de deux vecteurs est définie par une construction géométrique à base de parallélogramme. Le produit par un scalaire est défini à l'aide de la norme du vecteur.

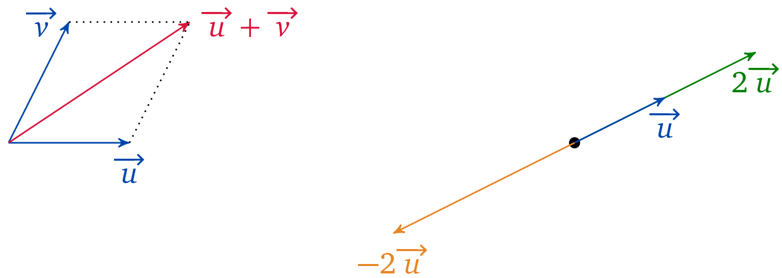


FIGURE I.1 — *Définition géométrique de l'addition vectorielle et du produit par un scalaire.*

Par des constructions géométriques, on peut retrouver la plupart des propriétés opératoires précédentes.

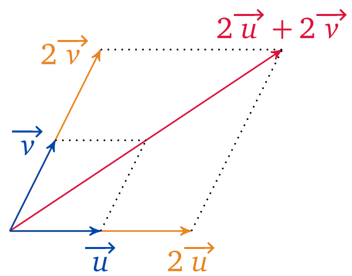


FIGURE I.2 — $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

D'ailleurs, nous allons reprendre exactement le vocabulaire du calcul vectoriel.

Vocabulaire

– les éléments de E sont dénommés vecteurs et es éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

– On dit que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou encore un $\mathbb{K}$–espace vectoriel (en abrégé E est un $\mathbb{K}$–e.v.)
– L'élément neutre pour l'addition s'appelle le vecteur nul de E et se note habituellement 0_E.

Enfin, noter qu'en pratique, le . de la multiplication par un scalaire est omis.

Pourquoi ne met-on plus de flèches sur les vecteurs ? D'un certain point de vue façon, les fonctions ou les suites sont des vecteurs : ça nous prendrait beaucoup de temps de mettre des flèches partout !

On mettra des flèches en géométrie, car c'est l'usage...

Propriété 1.6 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.*

1) *Pour tout vecteur x de E :* $0 \,.\, x = 0_E$.
2) *Pour tout scalaire λ :* $\lambda \,.\, 0_E = 0_E$.
3) *D'ailleurs, pour $x \in E$ et $\lambda \in K$:*

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad x = 0_E$$

4) *Pour $x \in E$, l'opposé de x est $(-1) \,.\, x$. Il est noté $-x$.*

Dém.

1) On peut remarquer que $0 \,.\, x = (0+0) \,.\, x = 0 \,.\, x + 0 \,.\, x$. En soustrayant (oups ! je veux dire « en ajoutant l'opposé de ») $0 \,.\, x$ aux deux membres, on trouve $0_E = 0 \,.\, x$.
2) On fait le même raisonnement que ci-dessus, en intervertissant le rôle des scalaires et des vecteurs :

$$\lambda \,.\, 0_E = \lambda \,.\, (0_E + 0_E) = \lambda \,.\, 0_E + \lambda \,.\, 0_E \implies 0_E = \lambda \,.\, 0_E \text{ après simplification}$$

3) Le sens $\Longleftarrow$ a été démontré aux deux points précédents. Voyons le sens réciproque. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ telles que $\lambda \,.\, x = 0_E$.
Si $\lambda = 0$ la propriété est vérifiée.
Si $\lambda \neq 0$, alors en multipliant par $1/\lambda$ on obtient $1/\lambda \,.\, (\lambda \,.\, x) = 0_E$, soit $1 \,.\, x = 0_E$ et donc $x = 0_E$.
Ainsi $x = 0_E$ ou $\lambda = 0_E$. $\square$

I.3 — Espaces de référence

Les ensembles suivants sont réputés être des espaces vectoriels. Vous pouvez les utiliser sans justification particulière.

Théorème 1.7 — L'ensemble $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de

- *l'addition vectorielle :*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \overset{\text{déf.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- *et du produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda \,.\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ fois}})$.

Dém. Pas de démonstration, mais il est assez intuitif que ces deux opérations que $\mathbb{K}^n$ hérite des propriétés de l'addition et de la multiplication de scalaire. □

Théorème 1.8 — Espace vectoriels de fonctions

Soit X une ensemble non vide. L'ensemble $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$. On le munit des deux opérations suivantes :

- *La somme de deux fonctions f et g est la fonction $(f + g)$ définie par*

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x) + g(x)$$

- *Le produit d'une fonction f par un scalaire λ définie par*

$$\forall x \in X, \quad (\lambda \,.\, f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \lambda \times f(x)$$

L'ensemble $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ est la fonction nulle $x \longmapsto 0$.

Dém. Ici encore, j'omets la démonstration, sans difficulté mais assez fastidieuse. □

D'autres exemples

– Le théorème précédent couvre le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais aussi, en prenant $X = \mathbb{N}$, le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- D'ailleurs les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment également un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- On a vu dans le chapitre sur les matrices que l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de la somme de matrice et du produit par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Nous définirons d'autres espaces au fur et à mesure de l'avancée du programme.

I.4 — Sous-espace vectoriel

Il est rare que l'on étudie un espace vectoriel résolument nouveau. En général, on se place d'emblée dans un des espaces de référence, qui constitue alors l'espace de référence, le cosmos du « petit » univers étudié.

Ce petit univers est un sous-espace du grand espace... c'est exactement l'objet de la définition suivante.

Définition 1.9 — Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.

On dit que F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F, +, .)$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Dans ce cas, le vecteur nul de E est aussi celui de F. En effet puisque $0_F \in E$, alors $0_F = 0_F + 0_E$. Mais on peut aussi écrire, en se plaçant dans F, que $0_F = 0_F + 0_F$. Ainsi $0_F + 0_F = 0_F + 0_E$. Il reste à simplifier par 0_F pour trouver $0_F = 0_E$.

Exemple

- Si E est un $\mathbb{K}$–ev, alors E est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus gros possible (au sens de l'inclusion).
- L'ensemble $\{0_E\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. Puisque tous les sous-espace vectoriel de E contiennent $\{0_E\}$, c'est le plus petit possible...

Théorème 1.11 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.

F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1) $F \neq \varnothing$;

2) pour tout couple $(u, v) \in F^2$ on a $u + v \in F$;

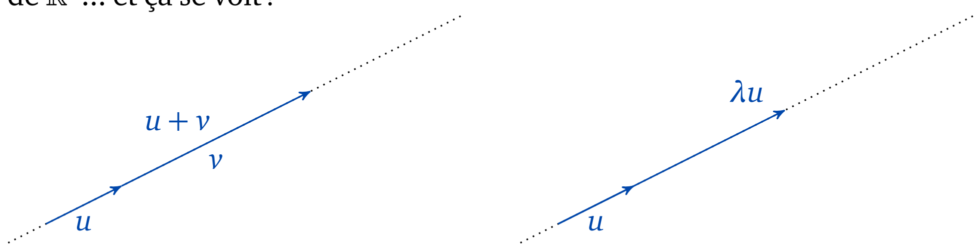
3) pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $u \in F$ on a $\lambda u \in F$

Dém. Les deux dernières conditions assurent que $+$ et $.$ définissent bien des opérations sur F. Ces opérations restreintes à F héritent évidemment des propriétés des opérations définies sur E. Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de E. □

En pratique On utilise *toujours* ce théorème de caractérisation. Il a deux usages : démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E... et démontrer tout simplement que F est un espace vectoriel !

Exemple

- Montrons par exemple que l'ensemble $\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
  1. tout d'abord $\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset FF(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les fonctions continues sont des fonctions...
  2. l'ensemble $\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est non vide. Il contient par exemple la fonction nulle.
  3. Si f et g sont deux fonctions continues, d'après le cours sur les fonctions continues, $f+g$ l'est également. De même λf est une fonction continue, avec λ un scalaire quelconque.
- De même, l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel.
- Dans $\mathbb{R}^2$ considérons une droite D passant par l'origine. Son équation cartésienne s'écrit $ax+by=0$, avec $(a,b)\neq(0,0)$. Cette droite est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$... et ça se voit !



Démontrons-le :

1. tout d'abord la droite D est bien inclue dans $\mathbb{R}^2$.
2. elle contient le vecteur nul $(0,0)$, donc elle n'est pas vide (remarquez que dans ce contexte « vecteur » est synonyme de « point »).
3. Si (x,y) et (x',y') sont deux points sur la droite alors $ax+by=0$ et $ax'+by'=0$. La somme des deux s'écrit $(x+x',y+y')$ et on a
$$a(x+x')+b(y+y')=ax+by+ax'+by'=0$$
ce qui prouve que cette somme est dans D.
4. Si (x,y) est un point de D est si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors le produit s'écrit $(\lambda x,\lambda y)$ et comme
$$a(\lambda x)+b(\lambda y)=\lambda(ax+by)=0$$
ce produit est aussi dans D.

Ainsi D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

– Une droite quelconque n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Par exemple la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, vu qu'elle ne contient pas le vecteur nul !

En pratique Pour montrer que F non vide, le mieux est de vérifier que le vecteur nul de E est dans F.

De plus on peut grouper les deux dernières propriétés en une seule :

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u + v = 0_E$$

Théorème 1.13 — Intersection de sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel. Toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

Dém. Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p sous-espace vectoriel de E et $F = \bigcap_{i=1}^{i} F_i$ leur intersection.

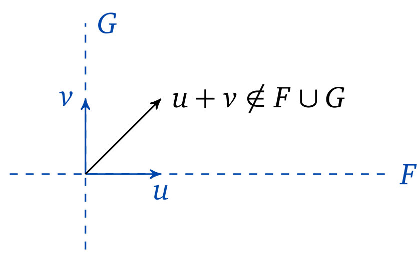
- Pour commence $F \subset E$.
- comme O_E est dans chacun des ensemble F_i, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, il est dans leur intersection. Ainsi F est non vide.
- Soit u et v deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme $u \in \bigcap_{i=1}^{i} F_i$, u est dans chacun des F_i et de même pour v.

  Puisque F_i est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\lambda u + v \in F_i$. Ainsi $\forall i \in [\![1 ; p]\!]$, $\quad u + v \in F_i$, donc $\lambda u + v \in \bigcap_{i=1}^{i} F_i$.

$\square$

Exercice 1 Soit F et G deux sous-espace vectoriel de E. En donnant un contre-exemple, démontrer qu'en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Solution — $F = \{(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E. Considérons $(1, 0)$ et $(0, 1)$: ces deux vecteurs sont dans $F \cup G$, et pourtant leur somme $u = (1, 1)$ n'est pas dans F, ni dans G, donc $u \notin F \cup G$. Ainsi $F \cup G$ n'est pas stable par l'addition.



II — Famille de vecteurs

II.1 — Définition

Définition 2.1 — Famille de vecteurs

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

On appelle famille de p vecteurs de E la donnée d'un élément de E^p, noté $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

Attention ! L'ordre des vecteurs compte ! La famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas la famille (u_1, u_3, u_2) !

Définition 2.2 — Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de de p vecteurs de E, et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

On appelle combinaison linéaire des u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

On dit que le vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ ou encore que u se décompose suivant $\mathscr{F}$.

Attention ! En toute généralité

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E \qquad \textbf{n'implique pas} \qquad \forall i \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad \lambda_i u_i = 0_E$$

C'est une erreur commune, alors que les contre-exemples ont faciles à trouver ! Ainsi

$$(2, -1, 4, 7) - (2, -1, 4, 7) = (0, 0, 0)$$

ou encore

$$(2, 0, -4) + 2(4, 1, 0) - (6, 2, -4) = (0, 0, 0)$$

Vous pouvez en inventer d'autres !

Exemple

– Écrire un vecteur comme combinaison linéaire des autres est une activité essentielle, mais parfois difficile.

Par exemple la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto 1$ puisque l'on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \times 1$$

Mais peut-on savoir si $\cos^3 x$ est c.l. de $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto 1$? Ou d'autres fonctions ?

– Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(1,2)$ est combinaison linéaire de $(1,4)$, $(0,2)$ et $(1,1)$. Il y a même plusieurs écritures possibles

$$(1,2) = (1,4) - (0,2) + 0 \times (1,1) = \frac{1}{2}(1,4) - \frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}(1,1)$$

– En est-il de même, dans $\mathbb{R}^3$, pour le vecteur $(4,5,4)$ par rapport à la famille $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$?

II.2 — Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs — Famille génératrice

Définition 2.4 — Espace vectoriel engendré

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des u_i est un sous-espace vectoriel de E. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Dém. Pour abréger, notons $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Il s'agit de vérifier que F est bien un espace vectoriel.

– Puisque les c.l. d'éléments de E sont dans E, on a $F \subset E$.

– F est non vide, puisque la c.l.

$$0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_p = 0_E$$

est bien dans F.

– Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et u et v deux éléments de F. Ces deux vecteurs peuvent s'écrire

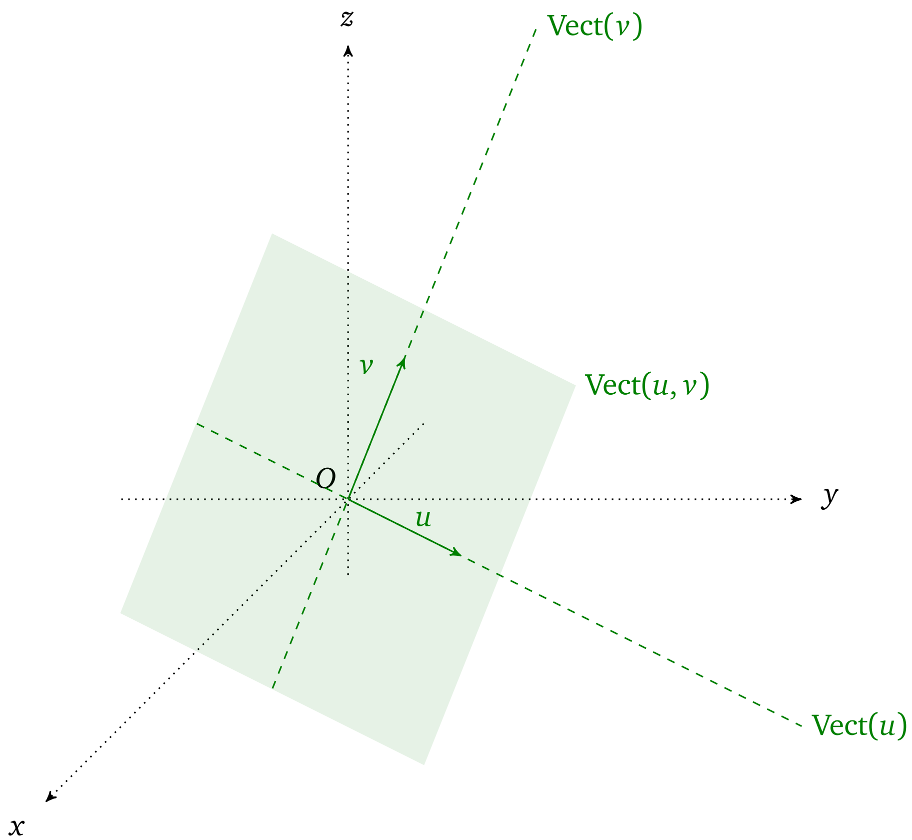
$$u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \qquad \text{et} \qquad v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i$$

On a alors $$\lambda u + v = \sum_{i=1}^{p} (\lambda \alpha_i + \beta_i) u_i$$

Ce qui prouve que $\lambda u + v \in F$.

Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de E. □

On peut se représenter un tel espace dans $\mathbb{R}^3$. Si on prend un seul vecteur u, l'ensemble $\mathrm{Vect}(u)$ est simplement la droite passant par l'origine et dirigée par u.



Il en va de même pour un autre vecteur v. Globalement $\mathrm{Vect}(u, v)$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de la première droite et d'un vecteur de la seconde droite. Dans le cas général, cela fait donc un plan passant par l'origine et dirigé par (u, v).

D'un point de vue plus général, $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

Définition 2.5 — Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

S'il existe une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E telle que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, alors on dit que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ engendre l'espace vectoriel F ou encore qu'elle est une famille génératrice de F.

En pratique Devant un espace vectoriel quelconque, il est souvent difficile de trouver une famille génératrice... ou même de prouver qu'il en existe une !

Mais dans un certain nombre de cas, on peut s'en sortir facilement

– Par exemple $\mathbb{K}^n$. Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ peut se décomposer sur une famille particulière. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors on a

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \dots, 1)\\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n\end{aligned}$$

où on a noté, pour $k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$, $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où l'unique 1 figure à la k–ième coordonnées.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Elle engendre $\mathbb{K}^n$, comme nous venons de le voir.

– Il est aisé de trouver une famille génératrice de

$$\begin{aligned}F &= \left\{(2a+3b-c, a+c, a-2b+4c, a+b+c), (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\right\}\\ &= \left\{a(2,1,1,1) + b(3,0,-2,1) + c(-1,1,4,1), (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\right\}\\ F &= \mathrm{Vect}\big((2,1,1,1), (3,0,-2,1), (-1,1,4,1)\big)\end{aligned}$$

– Du coup, on peut trouver facilement une famille génératrice pour l'ensemble des solutions d'un système homogène. Par exemple

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0\\ x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3y-z=0\\ -5y+3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5}z\\ y = \dfrac{3}{5}z \end{cases}$$

Donc ici $S = \left\{z\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right), z \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}((-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1))$.

D'ailleurs dans ce dernier cas, on peut modifier la famille génératrice, sans modifier l'espace engendré. En effet

$$\begin{aligned}S &= \left\{z\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right), z \in \mathbb{K}\right\}\\ &= \left\{-\frac{1}{5}z\,(2,-3,-5)\,, z \in \mathbb{K}\right\}\\ &= \{\lambda\,(2,-3,-5)\,, \lambda \in \mathbb{K}\}\\ S &= \mathrm{Vect}((2,-3,-5))\end{aligned}$$

On modifie en fait le paramètre, mais comme celui-ci varie librement dans $\mathbb{K}$, globalement l'espace n'est pas modifié.

En appliquant le même principe, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 2.6 — Opérations sur les familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

L'ensemble F est engendré par la famille de vecteurs obtenue en

1) *permutant les vecteurs de $\mathscr{B}$;*

2) ajoutant ou retirant le vecteur nul à $\mathscr{B}$;

3) multipliant un vecteur de $\mathscr{B}$ par un scalaire non nul;

4) ajoutant à un vecteur de $\mathscr{B}$ une combinaison linéaire des autres;

5) retirant un vecteur de $\mathscr{B}$ qui est combinaison linéaire des autres.

Dém. Les premiers points sont assez clairs. Le dernier s'obtient grâce aux précédents (penser au travail qui a été fait sur les systèmes d'équations linéaires).

Seul l'avant dernier nécessite vraiment une explication.

Voici une démonstration dans le cas d'une famille de 3 vecteurs… Ça se généralise ensuite facilement. Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Alors

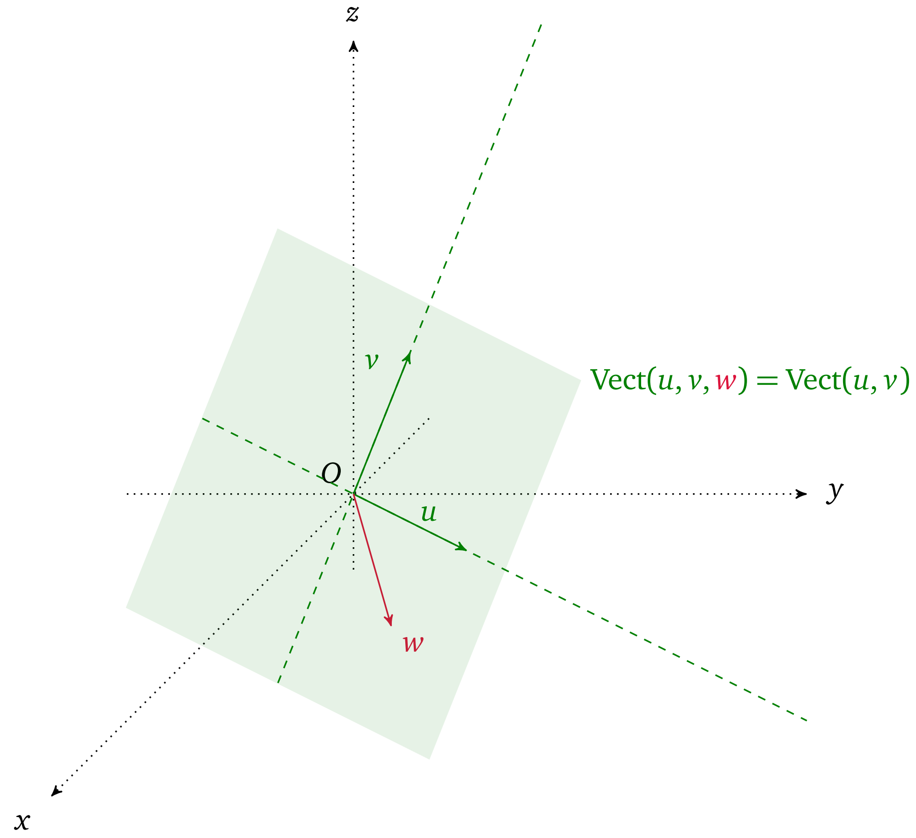
$$\begin{aligned} F &= \left\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in K^3\right\} \\ &= \left\{\lambda_1(u_1 - a u_2 - b u_3) + (\lambda_2 + \lambda_1 a) u_2 + (\lambda_3 + \lambda_1 b) u_3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in K^3\right\} \end{aligned}$$

On retire (ou ajoute, c'est pareil) à u_1 une c.l. des autres. Maintenant, on peut renommer les paramètres comme on l'a déjà fait.

$$F = \left\{\mu_1(u_1 - a u_2 - b u_3) + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in K^3\right\}$$

On peut retenir que $\mu_2 = (\lambda_2 + \lambda_1 a)$, etc. mais ça n'a pas d'intérêt ! La seule chose à retenir est que les paramètres varient librement dans $\mathbb{K}$. $\square$

En pratique Ce théorème permet de simplifier une famille génératrice. On diminue ainsi le nombre de vecteurs qu'elle contient. Géométriquement, un tel procédé se comprend bien !



La question qu'on peut se poser est alors de savoir où cela va s'arrêter ? Puisqu'on diminue le nombre de vecteurs, cela s'arrête bien un jour !

II.3 — Famille libre

Voyons maintenant la seconde propriété intéressante sur une famille de vecteurs.

Définition 2.7 — Famille libre

Une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est libre si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Vocabulaire Une famille qui n'est pas libre est dite liée. Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre, ces vecteurs sont dits linéairement indépendants.

Exemple

- Une famille contenant le vecteur nul est liée ;
- Une famille contenant deux vecteurs égaux est liée.
- un vecteur, deux vecteurs, trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2.9 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *toute sous-famille d'une famille libre est libre;*
- *toute sur-famille d'une famille liée est liée;*
- *en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.*

La définition d'une famille libre n'est toutefois pas praticable. En effet, comment savoir si la famille

$$\{(2,4,1,0),\ (4,0,7,-1),\ (1,2,3,-1),\ (2,0,0,1)\}$$

est libre ?

Pour cela il faudrait résoudre 4 systèmes du type

$$\begin{cases} 2 = 4a + b + 2c \\ \dots \end{cases}$$

C'est impraticable !

On dispose heureusement d'une propriété caractéristique très simple à manipuler.

Théorème 2.10 — Caractérisation d'une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

Cette famille est libre si et seulement si l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Dém. Démontrons sens direct par contraposée. Supposons que l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admette une solution non nulle $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \\ \Longrightarrow\ & u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n \end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille est liée.

Démontrons le sens réciproque, toujours par contraposée. Supposons que l'un des vecteurs est c.l. des autres, par exemple u_1. On a donc

$$u_1 = \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n \Longrightarrow u_1 \qquad -\mu_2 u_2 - \cdots - \mu_n u_n = 0$$

Ainsi $(1, -\mu_2, \cdots, -\mu_n)$ est une solution non nulle de l'équation. □

Proposition 2.11 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *la famille (e_1) est libre si et seulement si e_1 est non nul;*
- *la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont colinéaires).*

Propriété 2.12 — Unicité de la décomposition sur une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur u de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ se décompose d'une manière unique

$$\forall u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n), \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$$
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Dém. On égale deux écritures, on passe tout du même côté, et on utilise le théorème de caractérisation. □

Quelques cas simples.

II.3.1 — Étude systématique de la liberté d'une famille de vecteurs

Méthode systématique pour savoir si une famille de $\mathbb{R}^n$ est liée : avec des systèmes.

III — Base, dimension finie

III.1 — Base

Définition 3.1 — Base

Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et génératrice de E.

Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base

La famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'appellent les coordonnées de u selon la base $\mathscr{B}$.

Exemple

- Dans $\mathbb{K}^n$: la base canonique.
- Dans $\mathbb{C}$: $(1, \mathrm{i})$.

III.2 — Dimension

Définition 3.4 — Dimension finie

On dit qu'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement si il existe une base finie de E ou si E est réduit au vecteur nul.

Il n'est pas évident qu'un espace vectoriel soit de dimension finie. Par exemple l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.

Exemple

- $\mathbb{C}, \mathbb{K}^n$, le problème avec $\{0_E\}$.
- L'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Nous allons voir qu'une base d'un espace vectoriel de dimension finie peut être vue soit comme une famille libre de taille maximale, soit comme une famille génératrice de taille minimale.

Lemme 3.6 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de E.*

Alors $n \leqslant p$.

Dém. par les systèmes. □

Théorème 3.7 — Théorème de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si E n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre dimension de E et on le note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$. Si E est réduit au vecteur nul, alors par convention $\dim E = 0$.

Dém. C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente. □

Notez que $\{0_E\}$ est le seul espace vectoriel de dimension nulle. Il ne possède pas de base à proprement parler.

Théorème 3.8 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.*

De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base finie de E.

Dém. On ôte un à un les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. On aboutit à une famille libre et génératrice. □

Ce théorème donne une méthode pratique pour trouver une base à partir d'une famille génératrice.

Corollaire 3.9 — Famille génératrice et dimension

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n compte au moins n vecteurs.

Théorème 3.10 — Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n.

On peut compléter une famille libre quelconque de E en une base de E.

Dém. Soit $u_1, u_2, \dots, u_p$ est une famille libre de E. Si $E \neq \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors il existe un vecteur v qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$. En ajoutant v à cette famille, on obtient une nouvelle famille libre $(u'_1, u'_2, \dots, u'_{p+1})$ de E.

On ajoute ainsi des vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre de n vecteurs $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ de E telles que $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_n) = E$. Cette famille est également génératrice, c'est donc une base de E. 3.6. □

Corollaire 3.11 — Famille libre et dimension

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n compte au plus n vecteurs.

Le corollaire suivant est extrêmement utile !

Corollaire 3.12 — Base et dimension

Soit E un espace de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } E$$

Théorème 3.13 — Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F est un ev de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Dém. Si $F = \{0_E\}$ alors le résultat est immédiat.

Sinon F contient au moins un vecteur non nul, donc une famille libre (u_1).

Si $F = \overrightarrow{(}\, u_1)$ alors le résultat est vrai.

Sinon F contient une famille libre de deux vecteurs, etc.

Au rang n : on suppose donc que F n'admet pas de base ayant moins de $n-1$ vecteurs.

Alors il y a une famille libre de n vecteurs de F. Or cette famille est une base de E.

Ainsi on a $E = \overrightarrow{(}\, u_1, .., u_n) \subset F$. Comme par hypothèse $F \subset E$, finalement $F = E$. □

III.3 — Rang d'une famille de vecteur

Définition 3.14 — Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

On appelle rang de la famille $\mathscr{C}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

Le mot « rang » est donc une espèce de synonyme du mot « dimension ».

C'est le nombre de vecteurs de la famille qui sont linéairement indépendants.

On va voir dans la suite du chapitre une méthode de calcul relativement commode du rang d'une famille de vecteurs, ce qui justifie l'étude du rang.

Proposition 3.15 — Rang et familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- *$\mathscr{C}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \dim E$;*
- *$\mathscr{C}$ est une famille libre si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \mathrm{card}\, C$;*
- *$\mathscr{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \mathrm{card}\, C = \dim E$.*

Dém. Simple compte tenu de tout le cours précédent. □

IV — Utilisation des matrices

IV.1 — Représentation d'un vecteur par une matrice

Définition 4.1 — Matrice représentant un vecteur
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Si u est un vecteur de E alors

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne $U_{\mathscr{B}} = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$.
Réciproquement, à toute matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ on associe une unique vecteur u de E tel que U représente u dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.2 — *Avec les hypothèses et les notations de la définition précédente :*
1) *si $\lambda \in \mathbb{K}$, le vecteur λu est représenté par la matrice $\lambda U_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$;*
2) *si $v \in E$, le vecteur $u + v$ est représenté par la matrice $U_{\mathscr{B}} + V_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

IV.2 — Représentation d'une famille de vecteurs par une matrice

Définition 4.3 — Matrice représentant une famille de vecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ une base de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteur de E.
On a alors

$$\forall k \in [\![1\,;p]\!], \quad \exists!\,(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \qquad u_k = u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \cdots + u_{nk}e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice $C = (u_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

IV.3 — Rang d'une matrice

Définition 4.4 — Rang d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On appelle rang de la matrice M le rang de la famille de vecteurs ainsi définis.

L'intérêt du rang d'une matrice, est qu'il est calculable avec des opérations simples sur les colonnes de la matrices. En effet le théorème 2.6 se traduit par

Théorème 4.5 — Rang et opérations sur une matrice

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On ne modifie pas le rang de M en

1) *permutant les colonnes de M ;*
2) *ajoutant ou retirant une colonne nulle à M ;*
3) *multipliant une colonne de M par un scalaire non nul;*
4) *ajoutant à une colonne de M une combinaison linéaire des autres;*
5) *retirant une colonne de M qui est combinaison linéaire des autres.*

Dém. En effet, ces opérations ne modifient pas le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de M, donc sa dimension, donc le rang de M. □

Nous admettons alors le théorème suivant (qui sera démontré l'année prochaine).

Théorème 4.6 — *Dans un espace vectoriel E de dimension n, le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{C}$ est égal au rang de la matrice M représentant $\mathscr{C}$ dans une base quelconque de E.*

Le théorème suivant, très utile en pratique, est également admis (même l'année prochaine)

Théorème 4.7 — Rang de la transposée

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$

Corollaire 4.8 — *On peut effectuer les opérations du théorème 4.5 sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.*

Détermination pratique du rang, par des opérations sur les lignes ou les colonnes.