Équations différentielles

BCPST 1 — 27 février 2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre n est un entier naturel non nul et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

I — Généralités

Définition 1.1 — Équation différentielle

On appelle équation différentielle d'ordre n (en abrégé é.d.) une équation de la forme

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y'(t), y(t), t) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

où F est une fonction définie de $\mathbb{R}^{n+1} \times I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et y une fonction inconnue définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n fois dérivable.

On appelle solution de l'équation différentielle toute fonction y de classe n fois dérivable sur I vérifiant l'équation différentielle.

Notation Dans le cadre des équations différentielles, la fonction inconnue se note y et ses dérivées successives y', y'', $y^{(3)}$, etc. On note parfois cette fonction inconnue x. La variable est souvent notée t (le temps), parfois x.

Vocabulaire Résoudre une équation différentielle se dit parfois intégrer l'équation différentielle, tandis que les courbes des solutions de $(\mathscr{E})$ sont dénommées courbes intégrales de l'é.d.

Exemple

- $y' = 0$ a pour solution sur l'intervalle I les fonctions constantes (conséquence du TAF).
- $y' = y$ a pour solution, sur I, les fonctions de la forme $x \mapsto C\exp(x)$ (avec $C \in \mathbb{R}$).
- *Équation de la désintégration atomique* : $y' - ky = 0$. Les fonctions $y(t) = C\mathrm{e}^{-kt}$ (avec $C \in \mathbb{R}$) sont solutions de cette équations

- *Équation de l'oscillateur harmonique* : $y'' - \omega^2 y = 0$. *Oscillateur harmonique amorti* : $y'' + \lambda y' - \omega^2 y = 0$. *Oscillateur harmonique excité* : $y'' - \omega^2 y = F(t)$.
- *Équation logistique* : $y' = r\,y(1-y)$ avec $r \in \mathbb{R}$.
- Mais on peut faire preuve d'imagination : $y' = 2\sqrt{y}$, $y'(t) = y(t+1)$, etc. sont des équations différentielles intéressantes à étudier…

Définition 1.2 — Conditions initiales

Soit $(\mathscr{E})$ une é.d. d'ordre n.

On appelle conditions initiales la donnée en un point t_0 de I des valeurs de $y(t_0)$, $y'(t_0)$, … $y^{(n-1)}(t_0)$.

On parle aussi dans ce cas de conditions de Cauchy.

Résoudre le problème de Cauchy c'est trouver une solution de l'é.d. $(\mathscr{E})$ qui vérifie les conditions.

Exemple L'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$. C'est une définition possible de la fonction exponentielle.

Un système dynamique pour lequel à une condition initiale donnée ne correspond qu'une seule solution sera dit déterministe. Un système régi par l'équation différentielle $y' = 2\sqrt{y}$ sur $\mathbb{R}_+$ n'est pas déterministe. En effet, pour la condition initiale $y(0) = 0$ on trouve deux solutions 0 et t^2.

Définition 1.3 — Équation différentielle linéaire

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n un équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = b(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où a_0, a_1, …, a_{n-1} et b sont $n+1$ fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que l'équation $(\mathscr{E})$ est homogène si le second membre est nul.

On appelle équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\mathscr{E}_0)$$

Nous n'abordons dans ce chapitre que des é.d. linéaires. Nous donnerons une méthode de résolution générale d'é.d. linéaire du premier ordre, et nous allons aborder le cas des é.d. linéaires du second ordre à coefficients constants.

Les é.d. linéaires dispose de deux théorèmes de structure très importants. Voici le premier.

Théorème 1.4 — Structure de l'ensemble des solutions d'une é.d. homogène

Soit $(\mathscr{E}_0)$ *une é.d. linéaire homogène d'ordre* n.

Son ensemble de solution S_0 *est un sous-espace vectoriel de* $D^n(I, \mathbb{R})$.

Dém. Rappelons que $D^n(I, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

- Tout d'abord $S_0 \subset D^n(I, \mathbb{R})$ par définition.
- Ensuite la fonction nulle sur I étant solution de $(\mathscr{E}_0)$, l'ensemble S_0 n'est pas l'ensemble vide.
- Si u et v sont deux éléments de S_0 et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda u + v$ est n fois dérivable et

$$\begin{aligned} & u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = 0 \\ \text{et} \quad & v^{(n)} + a_{n-1}(t)v^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = 0 \\ \text{donc} \quad & (\lambda u^{(n)} + v^{(n)}) + \cdots + a_1(t)(\lambda u' + v') + a_0(t)(\lambda u + v) = 0 \end{aligned}$$

en multipliant la première ligne par λ puis en additionnant les deux lignes. Cette dernière équation prouve que $\lambda u + v \in S_0$. □

Théorème 1.5 — Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle

Soit $(\mathscr{E})$ *une é.d. linéaire d'ordre* n.

Son ensemble de solution S *est de la forme*

$$S = \{z + y_0 \text{ avec } y \in S_0\}$$

où z *est une solution de* $(\mathscr{E})$ *et* S_0 *est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.*

Dém. Soit z une solution de $(\mathscr{E})$. Notons $A = \{z + y_0 \text{ avec } y_0 \in S_0\}$ et montrons que $A = S$.

Tout d'abord toute élément de A est dans S.

Ensuite si y est une solution de $(\mathscr{E})$ alors $y - z$ est une solution de $(\mathscr{E}_0)$ donc $S \subset A$. □

II — É.d. linéaires du premier ordre

Définition 2.1 — Équation différentielle du premier ordre
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute é.d. du type

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Exemple L'équation logistique n'est pas linéaire, l'équation de la désintégration atomique l'est.

On peut également se pencher sur le cas d'une équation du type $\alpha(x)y' + a(x)y = b(x)$. Pour cela, on doit se placer au préalable sur un intervalle sur lequel la fonction α ne s'annule pas et on divise l'équation par α.

II.1 — Résolution de l'équation homogène

Théorème 2.2 — *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + a(x)y = 0$ est*

$$S_0 = \left\{ f \;:\; \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C\exp(-A(x)) \end{array} \right. \right\}$$

où C est une constante réelle et A une primitive de a sur l'intervalle I.

Dém. Soit z une solution de l'équation, on montre que $z\exp(+A(x))$ est de dérivée nulle, donc elle est constante. □

En fait, la méthode de la séparation des variables, peu rigoureuse, permet de comprendre ce qui se passe :

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -a(x)y \\ &\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\,\mathrm{d}x \\ &\implies \ln|y| - \ln(|(|y_0)) = -A(x) + A(x_0) \\ &\implies y = C\exp(-A(x)) \end{aligned}$$

Mathématiquement, c'est une horreur, à cause de la multiplicité des calculs non justifiés.

Exemple

- Résolution de $y' = ky$ sur $\mathbb{R}$.
  Cette équation peut se généraliser pour $m \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, les solutions sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Résolution de $y' + \dfrac{x}{x-1} y = x + 1$ sur $]1\,;\,+\infty[$.
  Ici $a(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et donc $A(x) = x + \ln(x-1)$. Tous calculs faits
  $$\forall x \in \,]1\,;\,+\infty[\,, \qquad y(x) = C(x-1)\mathrm{e}^x$$
  où C est un constante réelle.

II.2 — Résolution de l'équation avec second membre

D'après le principe de superposition, puisqu'on a résolu l'équation homogène, il reste à trouver une solution particulière de (E).

Recherche d'une solution « évidente » Il s'agit de tester des fonctions « simples » : constantes, affines, exponentielles, etc.

Exemple

- $y' + y = x + 1$;
- $y' + \dfrac{x}{x-1} y = x + 1$ $(y(x) = x - 1)$;

Recherche d'une solution particulière On applique la méthode de variation de la constante. Elle consiste à chercher une solution de la forme

$$y = C(x) \times \exp(-A(x))$$

Comme on a

$$\begin{aligned} y' + a(x) \times y &= -a(x)C(x)\exp(-A(x)) + C'(x)\exp(-A(x)) \\ &\quad + a(x)C(x)\exp(-A(x)) \\ b(x) &= C'(x)\exp(-A(x)) \\ \text{on en déduit} \qquad C'(x) &= b(x)\exp(A(x)) \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière ligne on exprime la fonction C et on en déduit ensuite y.

Exemple

- $y' + \dfrac{x}{x-1} y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x-1}$;
- $y' - \dfrac{2}{x} y = x^2$.
- $y' - \dfrac{2}{x} y = x$.

– $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + x$ (exposé du principe de superposition).

II.3 — Résolution du problème de Cauchy

Théorème 2.3 — *Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du premier ordre admet une unique solution.*

Dém. La condition initiale s'écrit $y(x_0) = y_0$ et il s'agit de trouver C. On trouve une unique valeur de C, d'où le résultat.

Noter que si A est l'unique primitive de a qui s'annule en x_0 alors □

III — É.d. linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 — **Équation différentielle du second ordre**

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute é.d. de la forme

$$(\mathscr{E}) : ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a, b et c sont trois réels fixés, avec $a \neq 0$, et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

III.1 — Résolution de l'équation homogène associée

Analyse

Cherchons les solutions de la forme $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. λ est donc un réel inconnu que nous cherchons à déterminer.

Par le calcul on trouve que λ doit vérifier l'équation caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Si $\Delta > 0$, on trouve deux réels λ_1 et λ_2, donc deux fonctions solutions $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ et $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$.

Si $\Delta = 0$, on ne trouve qu'un seul réel λ et donc une seule solution $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation à deux solutions complexes conjuguées. On ne trouve pas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ qui soit solutions, mais deux fonctions à valeurs complexes $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ et $z(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$, avec $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

Cas $\Delta > 0$

Soit alors y une solution de l'équation. Introduisons la fonction annexe $z = y\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$. On va chercher une é.d. vérifiée par z. Si on sait résoudre cette deuxième é.d., alors on pourra trouver z et donc trouver y :

$$\begin{aligned}
z' &= y'\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 y\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
z'' &= y''\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} - 2\lambda_1 y'\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + \lambda_1^2 y\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
&= \left(-\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} - 2\lambda_1 y'\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + \lambda_1^2 y\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
&= \left[\left(-\frac{b}{a} - 2\lambda_1\right)y' + \left(\lambda_1^2 - \frac{c}{a}\right)y\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1)\, y'\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + \left(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2\right) y\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\left[y' + \lambda_1 y\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
z'' &= (\lambda_2 - \lambda_1) z'
\end{aligned}$$

On trouve que $z' = C\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$.

Comme ici $\lambda_2 \neq \lambda_1$, on a alors $z = \dfrac{C}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + C_2$. J'appelle alors C_1 la constante $\dfrac{C}{\lambda_2 - \lambda_1}$ et on prouve ainsi que si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes, l'é.d. (E') a pour ensemble de solutions

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

Exemple Résolution de l'équation homogène associée à $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-t}$.

Si $\Delta = 0$

En posant $\lambda_2 = \lambda_1$ on peut refaire intégralement le calcul précédent. On aboutit cette fois-ci à $z'' = 0$, donc $z' = C_1$ et $z = C_1 x + C_2$, on trouve alors

$$y = C_1 x\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{avec} \quad C_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple Résolution de l'équation homogène associée à $4y'' + 4y' + y = \cos t$.

Si $\Delta < 0$

Faisons une incursion dans l'ensemble des fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes. On peut les dériver comme des fonctions à valeurs réelles, et donc il n'est pas difficile d'admettre que les calculs précédents peuvent être intégralement refaits. Ainsi les solutions s'écrivent

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

Revenons à des fonctions à valeurs réelles. Posons pour cela $C_1 = A_1 + \mathrm{i}B_1$ et $C_2 = A_2 + \mathrm{i}B_2$, avec $(A_1, B_1, A_2, B_2) \in \mathbb{R}^4$, cela fait 4 paramètres réels à déterminer. Posons enfin $\lambda_1 = \lambda + \mathrm{i}\omega$et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \lambda - \mathrm{i}\omega$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) &= C_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} \\
&= C_1 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + C_2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \\
&= \left(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \right) \mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= [(A_1 + \mathrm{i}B_1)(\cos \omega x + \mathrm{i} \sin \omega x) \\
&\quad + (A_2 + \mathrm{i}B_2)(\cos \omega x - \mathrm{i} \sin \omega x)] \mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= [(A_1 + A_2) \cos \omega x + (-B_1 + B_2) \sin \omega x \\
&\quad + \mathrm{i}((B_1 + B_2) \cos \omega x + (A_1 - A_2) \sin \omega x)] \mathrm{e}^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Comme $y(x)$ est un réel, pour tout x, nous devons avoir $B_1 + B_2 = A_1 - A_2 = 0$. Finalement, en notant $C_1' = 2A_1$ et $C_2' = 2B_2$, qui sont deux constantes réelles, on trouve que y est de la forme

$$y = \left(C_1' \cos \omega x + C_2' \sin \omega x \right) \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad (C_1', C_2') \in \mathbb{R}^2$$

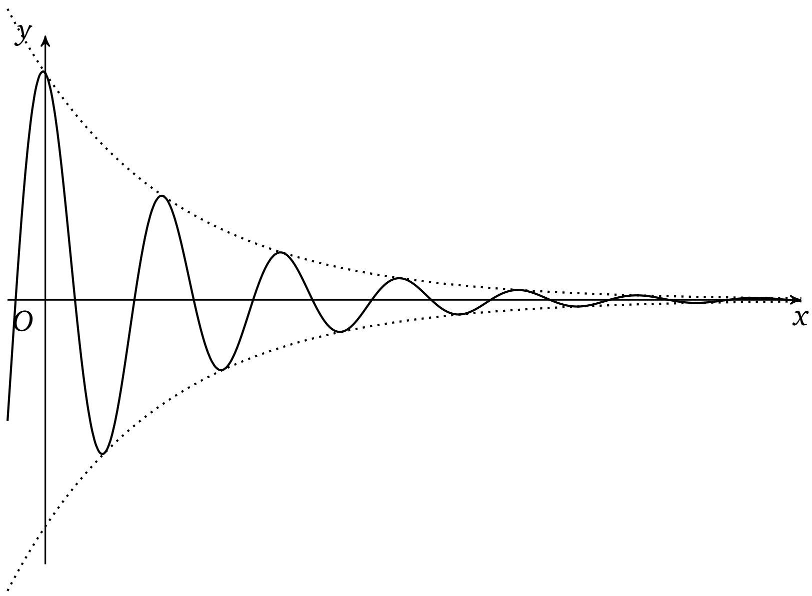

FIGURE I.1 — *Représentation d'une solution d'une équation différentielle homogène du second ordre, dans le cas $\Delta < 0$. Le réel λ est un facteur d'amortissement, tandis que ω est la fréquence propre.*

Autre écriture On remarque qu'on vient de montrer que dans l'écriture « complexe » de y, on a $C_1 = \overline{C_2}$. On peut aussi mettre C_1 et C_2 sous forme exponentielle $C_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $C_1 = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ avec A et φ réels. Dans ce cas

$$y(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{e}^{\lambda x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \mathrm{e}^{\lambda x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$$

$$= Ae^{\lambda x}\left(e^{i(\omega x+\varphi)} + e^{-i(\omega x+\varphi)}\right)$$
$$y(x) = 2Ae^{\lambda x}\cos\left(\omega x+\varphi\right)$$

On repère donc l'ensemble des solutions avec deux autres réels A et φ (amplitude/phase-
.

Exemple Résolution des équations homogènes associées à
- $y'' + \omega_0^2 y = 0$ (oscillateur harmonique)
- $y'' - 2y' + 5y = e^t$

En conclusion

Théorème 3.2 — Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre
L'équation différentielle linéaire

$$(\mathscr{E}_0): \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

admet sur $\mathbb{R}$ *un ensemble de solutions* S_0 *qui dépend de deux paramètres réels.*
Soit $aX^2+bX+c = 0$ *l'équation caractéristique de* $\mathscr{E}_0$*, et* $\Delta = b^2-4ac$ *son discriminant.*
Si $\Delta > 0$ *alors l'ensemble de solution de* $\mathscr{E}_0$ *s'écrit*

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont les racines de l'équation caractéristique.*
Si $\Delta = 0$ *alors*

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ *est l'unique racine de l'équation caractéristique.*
Si $\Delta < 0$ *et si* $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ *et* $\lambda_2 = \lambda - i\omega$ *sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors*

$$S_0 = \left\{x \mapsto (C_1\cos\omega x + C_2 \sin\omega x)e^{\lambda x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{x \mapsto A\cos(\omega x+\varphi)e^{\lambda x} \ \text{ avec } \ A \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \varphi \in \mathbb{R}\right\}$$

III.2 — Résolution de l'équation avec second membre

Il existe une méthode générale pour trouver une solution particulière de l'é.d. avec second membre. Toutefois, nous n'allons pas l'apprendre. À la place, nous allons nous contenter d'une méthode empirique pour trouver la solution particulière, qui fonctionnera dans la plupart des cas simples.

Solution « évidente » Il faut y penser ! Une solution n'est jamais vraiment évidente. En fait, on teste quelques fonctions simples : fonctions affines, exponentielles, etc.

Solution « du même type que... »

Il s'agit de trouver une solution de la même famille que le second membre. Qu'appelle-t-on « famille » ? Et bien un espace vectoriel de fonction contenant f et qui est stable par la dérivation.

En général, il sera donné dans l'exercice.

Cas où f est un polynôme

On cherche une solution particulière polynomiale P_0. On réfléchit en deux temps : d'abord on détermine le degré de P_0, ensuite on pose $P_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ où n est le degré de P_0, et on détermine les coeff. à l'aide de l'é.d.

Exemple

- $y'' + y = x^2$
- $y'' + 2y' + y = x^4$

Le principe est donc :

- Si $c \neq 0$, alors on cherche une solution du même degré que f ;
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors on cherche une solution de degré $\mathrm{d}^\circ f + 1$;
- Si $c = 0$ et $b = 0$, comme on sait que $a \neq 0$, alors on cherche une solution de degré $\mathrm{d}^\circ f + 2$.

Cas où f est une fonction exponentielle.

Ici, f est de la forme$x \mapsto \mathrm{e}^{mx}$. Dans ce cas, le plus naturel semble de chercher y sous la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{mx}$. Voyons cela.

Exemple

- $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^x$;
- $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2x}$.

Dans le second cas, cela n'a pas fonctionné, car m est racine de l'équation caractéristique !

Précisons tout cela.

Théorème 3.3 — *Soit $ay'' + by' + cy = \alpha e^{mx}$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et $aX^2 + bX + c = 0$ son équation caractéristique.*

- *Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme Ae^{mx} ;*
- *Si m est une racine* simple *de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $(Ax + B)e^{mx}$;*
- *Si m est une racine* double *de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $(Ax^2 + Bx + C)e^{mx}$.*

Dém. On remarquera que dans ce dernier cas, le discriminant de l'éq. caractéristique est nul.

On cherche donc, une solution de l'é.d. de la forme $y_0 = P(x)e^{mx}$ où P est une fonction polynômiale. On a alors

$$\begin{aligned}
y_0 &= Pe^{mx} \\
y_0' &= P'e^{mx} + mPe^{mx} \\
y_0'' &= P''e^{mx} + 2mP'e^{mx} + m^2Pe^{mx} \\
ay_0'' + by_0' + cy_0 &= (am^2 + bm + c)Pe^{mx} \\
&\quad + (2am + b)P'e^{mx} + cP''e^{mx} \qquad \text{par combinaison linéaire} \\
\alpha e^{mx} &= (am^2 + bm + c)Pe^{mx} \\
&\quad + (2am + b)P'e^{mx} + cP''e^{mx} \\
\alpha &= (am^2 + bm + c)P \\
&\quad + (2am + b)P' + cP''
\end{aligned}$$

P impose le degré du terme de droite. Or ce degré est nul (terme de gauche). Donc

Si $am^2 + bm + c \neq 0$ alors $d°(P) = 0$ donc P est constant : $P(x) = A$

Si $am^2+bm+c = 0$ et $m \neq -b/2a$ alors $d°(P') = 0$ donc $d°(P) = 1$ est $P(x) = Ax+B$.

Si $am^2 + bm + c = 0$ et $m = -b/2a$ alors $d°(P) = 2$ est $P(x) = Ax^2 + Bx + C$. ☐

Exemple $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

Cas où f est une fonction cos ou sin.

Remarquons que le résultat précédent est encore valable si m est un nombre complexe. D'après le théorème de superposition, on peut chercher une racine de $ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\omega x)$ comme somme d'une racine de $ay'' + by' + cy = \frac{\alpha}{2}e^{i\omega x}$ et de $ay'' + by' + cy = \frac{\alpha}{2}e^{-i\omega x}$. On est ramené à la même discussion que ci-dessus. Ainsi on cherche une solution de la forme $P(x)e^{i\omega x} + Q(x)e^{i\omega x}$ avec P et Q deux polynômes de degré au plus 2. Tous calculs faits, on peut affirmer que

Théorème 3.4 — *Soit $ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et $aX^2 + bX + c = 0$ son équation caractéristique.*

- *Si $\mathrm{i}\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$;*
- *Si $\mathrm{i}\omega$ est une racine* simple *de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $(A_1t + A_2)\cos(\omega t) + (B_1t + B_2)\sin(\omega t)$;*
- *Si m est une racine* double… *ah non, ce n'est pas possible !*

Ce théorème illustre l'effet de résonnance de l'oscillateur harmonique excité.

Exemple $4y'' + 4y' + y = \cos 2x$.

III.3 — Résolution du problème de Cauchy

Théorème 3.5 — *Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du second ordre à coefficients constants admet une unique solution.*

Dém. La c.i. s'écrit $y(x_0) = y_0$ et il s'agit de trouver C. □