Ensembles

bcpst 1, 27/03/2018

Dans le chapitre Logique nous avons vu les fondements « intellectuels » des mathématiques modernes. Nous en voyons maintenant les fondements « formels », le langage dans lequel les mathématiciens travaillent : la Théorie des Ensembles.

I — Définition d'un ensemble ?

La notion d'ensemble est difficile à définir de façon rigoureuse. Nous considérerons simplement qu'un ensemble est une collection d'objets.
Lorsque un objet x fait partie de la collection E, on dit que « x est un élément de l'ensemble E » et on note « $x \in E$ ». Si x ne fait pas partie de la collection E on note « $x \notin E$ ».
On admet l'existence d'un ensemble vide, noté $\varnothing$. C'est l'unique ensemble tel que $x \in \varnothing$ est faux, quelque soit l'objet x. Bien qu'en apparence paradoxal, cet ensemble est très utile !
En général, les ensembles que nous manipulerons seront définis comme des sous-ensemble d'ensembles bien connus comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, etc.

À l'aide d'un prédicat On peut définir un sous-ensemble de manière implicite par une propriété. Par exemple « l'ensemble des nombres impairs », « l'ensemble des entiers qui sont des carrés parfaits », « l'ensemble des réels dont le carré est strictement négatifs ». Il est plus intéressant de traduire cette propriété sous forme mathématique. Nous emploierons plutôt la notation suivante :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ x \text{ est impair }\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ y = 2x + 1\right\}$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ x^2 < 0\right\}$$

On parle de définition d'un ensemble en compréhension.
L'intérêt, c'est que l'on voit tout de suite comment raisonner cet ensemble : « Soit $(x, y) \in B$, alors $y = 2x + 1$ et… »
La difficulté d'une telle définition implicite est qu'elle peut très bien ne rien définir. Par exemple l'ensemble C défini ci-dessus est l'ensemble vide. On devra toujours penser à vérifier que l'ensemble défini n'est pas vide, sous peine de démarrer un raisonnement par une proposition fausse… on en connaît les conséquences !

Par paramétrisation Cette fois ci on décrit un ensemble comme l'image d'un autre ensemble par une opération.

$$E = \{(t, 2t + 1), t \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{(\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R}\}$$
$$G = \left\{(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}), t \in \mathbb{R}\right\}$$

Cette définition en apparence peu claire est très utile en pratique quand il s'agit de mener des calculs.
Un même ensemble peut avoir plusieurs définitions différentes. Ainsi

$$\mathscr{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ \text{ tel que } \ |z| = 1\}$$
$$\mathscr{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$\mathscr{C}_3 = \{(\cos t, \sin t) \ \text{ avec } \ t \in \mathbb{R}\}$$

sont trois définitions différentes d'un même ensemble : le cercle trigonométrique.

Exercice 1 1. Qu'est-ce qu'un nombre pair ? Un nombre impair ?

2. On note P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs. Démontrer que
   a) $\forall n \in P, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \qquad n = 2k$;
   b) $\forall n \in I, \quad \exists k \in \mathbb{N} \qquad n = 2k + 1$;
   c) $\forall n \in I, \quad \exists k \in \mathbb{N}^*, \qquad n = 2k - 1$.

II — Parties d'un ensemble

Définition 2.1 — Sous-ensemble
Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un sous-ensemble (ou une partie) de E si et seulement si

$$\forall x \in F, \qquad x \in E$$

ou encore « $x \in F \implies x \in E$ ». On note alors $F \subset E$.

Exercice 2 Soit E l'ensemble des nombre premiers et F l'ensemble des nombres impairs. Est-ce que $E \subset F$? Est-ce que $F \subset E$?

Exercice 3 Soit E un ensemble. Est ce que $\varnothing \subset E$?

Exercice 4 Soit $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \left\{6^k, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Est-ce que $A \subset B$? Est-ce que $B \subset A$?

Définition 2.2 — Ensemble des sous-ensembles
Les sous-ensembles de E forment une collection d'objet. C'est donc un ensemble : l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.

Exemple Si $E = \{a, b, c\}$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, (a), (b), (c), (a, b), (a, c), (b, c), (a, b, c)\}$.

Exercice 5 Écrire $\mathscr{P}(E)$ avec $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Propriété 2.4 — *Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre*

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad E \subset F \ \text{ et } \ F \subset E$$

Exercice 6 Vérifier que les ensembles

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ y = x + 2\right\}$$
$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 2x - 4y = 0\right\}$$

sont bien égaux.

III — Union, intersection

Définition 3.1 — Union et intersection de deux ensembles
Soit E et F deux ensembles

– *On appelle union de E et de F et on note $E \cup F$ l'ensemble*

$$E \cup F = \{x \ \text{ tel que } \ x \in E \ \text{ ou } \ x \in F\}.$$

– *On appelle intersection de E et de F et on note $E \cap F$ l'ensemble*

$$E \cap F = \{x \ \text{ tel que } \ x \in E \ \text{ et } \ x \in F\}.$$

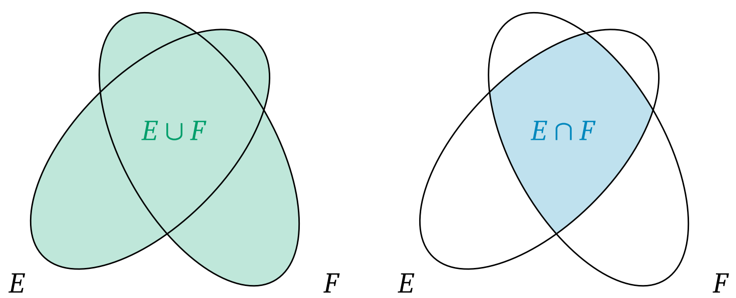


FIGURE I.1 — *Union et intersection*

Propriété 3.2 — *Soit A, B et C trois ensembles*

$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup \varnothing = A$$

commutativité $\qquad A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$

associativité $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

et $\qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributivité $\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

et $\qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

DÉM. Les deux premiers sont évidents. Pour les deux derniers, on utilise les propriétés de « et » et « ou » vu dans le cours de Logique.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in A \cap B \ \text{ et } \ x \in C \\ &\iff (x \in A \ \text{ et } \ x \in B) \ \text{ et } \ x \in C \\ &\iff x \in A \ \text{ et } \ (x \in B \ \text{ et } \ x \in C) \\ &\iff x \in A \ \text{ et } \ x \in B \cap x \in C \end{aligned}$$

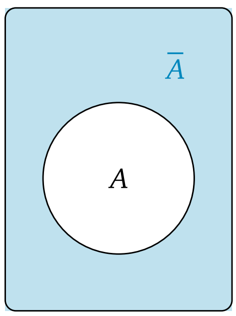
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \ \text{ et } \ (x \in B \ \text{ ou } \ x \in C) \\ &\iff x \in A \ \text{ et } \ x \in B) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \in C) \end{aligned}$$ □

Définition 3.3 — Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E et on note $\complement_E A$ l'ensemble

$$\complement_E A = \{x \in E \ \ \textit{tel que} \ \ x \notin A\} .$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible (c'est-à-dire lorsque que E peut-être sous entendu), on note plus simplement $\complement A$ ou encore $\overline{A}$.



E

FIGURE I.2 — *Complémentaire d'un ensemble*

Exemple Le complémentaire de $\varnothing$ dans E est E et vice-versa.

Propriété 3.5 — Formules de De Morgan
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

DÉM. Le complémentaire correspond au « non » logique.
La seconde propriété se démontre en appliquant la première à $\overline{A}$ et $\overline{B}$ et en passant au complémentaire. □

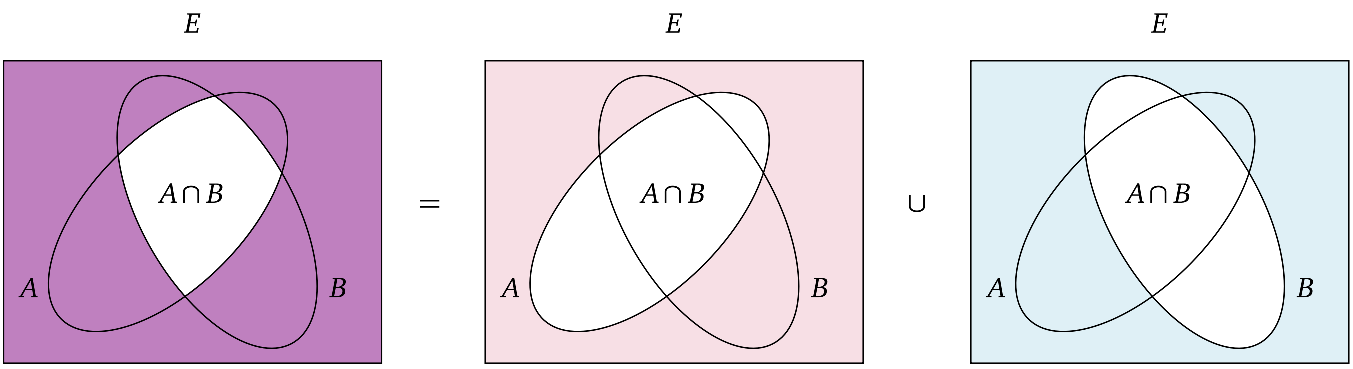


FIGURE I.3 — *Formule de De Morgan*

Définition 3.6 — Différence de deux ensembles
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On note $A \backslash B$ (A privé de B) l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

$$A \backslash B = \{x \in E \ \ \text{tel que} \ \ x \in A \ \ \text{et} \ \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

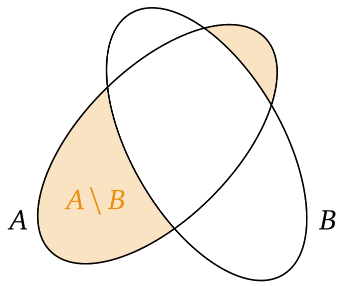


FIGURE I.4 — *Différence de deux ensembles*

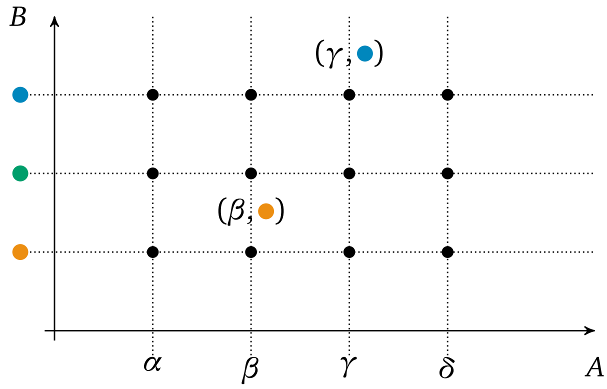
Définition 3.7 — Ensembles disjoints
Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

On peut aussi dire que A et B sont disjointes si $A \in \overline{B}$ ou encore si $B \in \overline{A}$ (définitions équivalentes).

IV — Produit cartésien

Définition 4.1 — Produit cartésien
Soit A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et de B et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.
Soit n un entier naturel non nul, $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles. On appelle vocproduit cartésien de $A_1, A_2, \dots, A_n$ et on note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ l'ensemble des n–uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, …, $x_n \in A_n$.

On note $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, etc. Par convention A^1 est identifié à A. On parle indifféremment de n–liste ou de n–uplet d'éléments de A.
On appelle $A \times B$ le produit cartésien de A et de B, car ses éléments (x, y) peuvent être compris comme des points de coordonnées un peu spéciales. Par exemple, avec $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $B = \{●, ●, ●\}$.



V — Partition

Définition 5.1 — Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n parties de E. On dit que ces n parties forment une partition de E si et seulement si

1) *elles sont non vides :*

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \qquad A_i \neq \varnothing$$

2) *elles sont disjointes deux à deux :*

$$\forall (i,j) \in [\![0 ; n]\!]^2, \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

3) *elles recouvrent E :*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$$

Ces parties forment comme un système de casier qui recouvre complètement E.

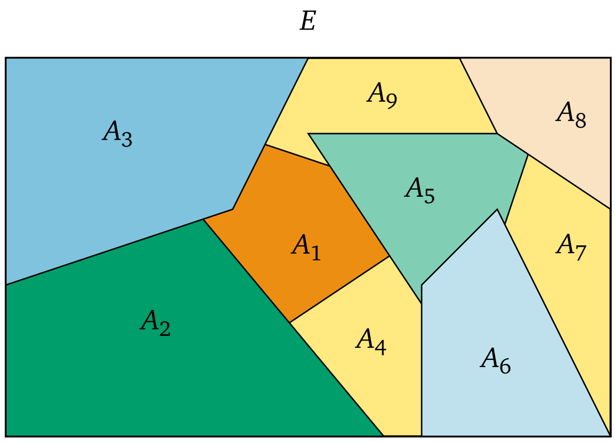


FIGURE I.5 — *Partition d'un ensemble.*

Exemple

- Par exemple, si $E = \{1, \dots, 7\}$:
  - $A = \{1, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ forment une partition de E ;
  - $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ ne forment pas une partition de E ;
  - $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ ne forment pas non plus une partition de E.
- Mais aussi toutes parties définies par disjonction de cas.