

# Ensembles

BCPST I — 24 octobre 2017

Dans le chapitre Logique nous avons vu les fondements « intellectuels » des mathématiques modernes. Nous en voyons maintenant les fondements « formels », le langage dans lequel les mathématiciens travaillent : la Théorie des Ensembles.

## I — Définition d'un ensemble ?

La notion d'ensemble est difficile à définir de façon rigoureuse. Nous considérerons simplement qu'un **ensemble** est une collection d'objets.

Lorsque un objet  $x$  fait partie de la collection  $E$ , on dit que «  $x$  est un élément de l'ensemble  $E$  » et on note «  $x \in E$  ». Si  $x$  ne fait pas partie de la collection  $E$  on note «  $x \notin E$  ».

On admet l'existence d'un **ensemble vide**, noté  $\emptyset$ . C'est l'unique ensemble tel que  $x \in \emptyset$  est faux, quelque soit l'objet  $x$ . Bien qu'en apparence paradoxal, cet ensemble est très utile !

En général, les ensembles que nous manipulerons seront définis comme des sous-ensemble d'ensembles bien connus comme  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^3$ , etc.

**À l'aide d'un prédicat** On peut définir un sous-ensemble de manière implicite par une propriété. Par exemple « l'ensemble des nombres impairs », « l'ensemble des entiers qui sont des carrés parfaits », « l'ensemble des réels dont le carré est strictement négatifs ».

Il est plus intéressant de traduire cette propriété sous forme mathématique. Nous emploierons plutôt la notation suivante :

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \text{ est impair} \} \\B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = 2x + 1\} \\C &= \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^2 < 0\}\end{aligned}$$

On parle de **définition d'un ensemble en compréhension**.

L'intérêt, c'est que l'on voit tout de suite comment raisonner cet ensemble : « Soit  $(x, y) \in B$ , alors  $y = 2x + 1$  et... »

La difficulté d'une telle définition implicite est qu'elle peut très bien ne rien définir. Par exemple l'ensemble  $C$  défini ci-dessus est l'ensemble vide. On devra toujours penser à vérifier que l'ensemble défini n'est pas vide, sous peine de démarrer un raisonnement par une proposition fausse... on en connaît les conséquences !

**Par paramétrisation** Cette fois ci on décrit un ensemble comme l'image d'un autre ensemble par une opération.

$$E = \{(t, 2t + 1), t \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{(\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{(e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}), t \in \mathbb{R}\}$$

Cette définition en apparence peu claire est très utile en pratique quand il s'agit de mener des calculs.

Un même ensemble peut avoir plusieurs définitions différentes. Ainsi

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}\}$$

sont trois définitions différentes d'un même ensemble : le cercle trigonométrique.

- Exercice 1**
1. Qu'est-ce qu'un nombre pair ? Un nombre impair ?
  2. On note  $P$  l'ensemble des nombres pairs et  $I$  l'ensemble des nombres impairs. Démontrer que
    - a)  $\forall n \in P, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ ;
    - b)  $\forall n \in I, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$ ;
    - c)  $\forall n \in I, \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k - 1$ .

## II — Parties d'un ensemble

### Définition 2.1 — Sous-ensemble

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $F$  est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de  $E$  si et seulement si

$$\forall x \in F, \quad x \in E$$

ou encore «  $x \in F \implies x \in E$  ». On note alors  $F \subset E$ .

Pour démontrer que  $F$  est un sous-ensemble de  $E$ , on doit prendre un élément quelconque de  $F$  et on montre qu'il est dans  $E$ .

**Exercice 2** Soit  $E$  l'ensemble des nombre premiers et  $F$  l'ensemble des nombres impairs. Est-ce que  $E \subset F$ ? Est-ce que  $F \subset E$ ?

**Exercice 3** Soit  $E$  un ensemble. Est ce que  $\emptyset \subset E$ ?

**Exercice 4** Soit  $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$  et  $B = \{6^k, k \in \mathbb{N}^*\}$ .  
Est-ce que  $A \subset B$ ? Est-ce que  $B \subset A$ ?

### Définition 2.2 — Ensemble des sous-ensembles

Les sous-ensembles de  $E$  forment une collection d'objet. C'est donc un ensemble : l'ensemble des parties de  $E$ , noté  $\mathcal{P}(E)$ .

| **Exemple** Si  $E = \{a, b, c\}$  alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, (a), (b), (c), (a, b), (a, c), (b, c), (a, b, c)\}$ .

**Exercice 5** Écrire  $\mathcal{P}(E)$  avec  $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ .  
C'est pénible, n'est-ce-pas?

**Propriété 2.4** — Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Ainsi pour montrer que deux ensembles sont égaux, on prend un élément quelconque de l'un, et on vérifie qu'il est dans l'autre, puis on recommence dans l'autre sens.

**Exercice 6** Vérifier que les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x + 2\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 2x - 4y = 0\}$$

sont bien égaux.

### III — Union, intersection

#### Définition 3.1 — Union et intersection de deux ensembles

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles

– On appelle *union* de  $E$  et de  $F$  et on note  $E \cup F$  l'ensemble

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

– On appelle *intersection* de  $E$  et de  $F$  et on note  $E \cap F$  l'ensemble

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

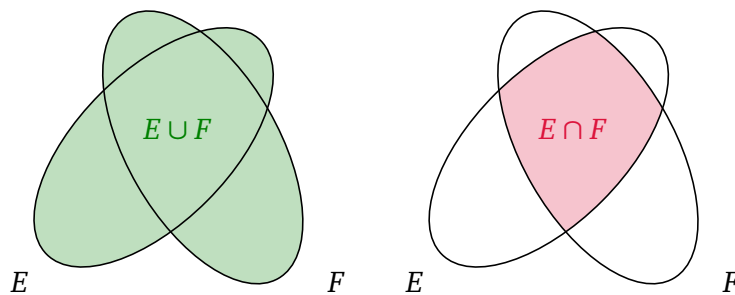


FIGURE I.1 — Union et intersection

#### Propriété 3.2 — Soit $A$ , $B$ et $C$ trois ensembles

	$A \cap \emptyset = \emptyset$	et	$A \cup \emptyset = A$
commutativité	$A \cap B = B \cap A$	et	$A \cup B = B \cup A$
associativité	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		
	et	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		
	et	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	

**Dém.** Les deux premiers sont évidents. Pour les deux derniers, on utilise les propriétés de « et » et « ou » vu dans le cours de Logique.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in A \cap B \text{ et } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \end{aligned}$$

$$\iff x \in A \text{ et } x \in B \cap x \in C$$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \quad \square \end{aligned}$$

### Définition 3.3 — Complémentaire d'un ensemble

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle *complémentaire de  $A$  dans  $E$*  et on note  $\complement_E A$  l'ensemble

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible (c'est-à-dire lorsque que  $E$  peut-être sous-entendu), on note plus simplement  $\complement A$  ou encore  $\bar{A}$ .

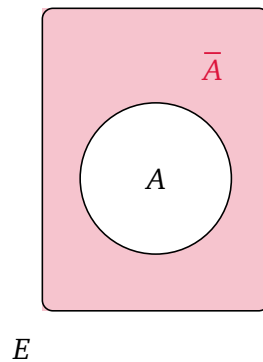


FIGURE I.2 — Complémentaire d'un ensemble

**Exemple** Le complémentaire de  $\emptyset$  dans  $E$  est  $E$  et vice-versa.

### Propriété 3.5 — Formules de De Morgan

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

**Dém.** Le complémentaire correspond au « non » logique.

La seconde propriété se démontre en appliquant la première à  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  et en passant au complémentaire.  $\square$

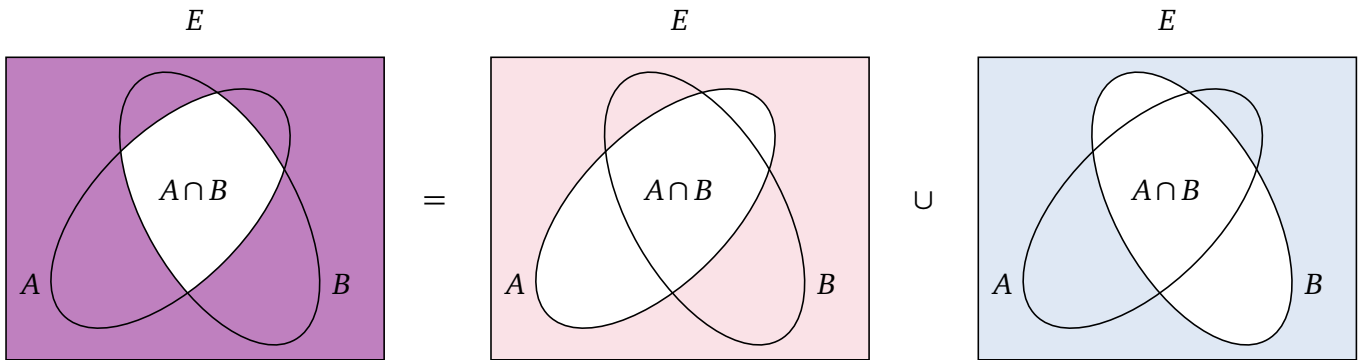


FIGURE I.3 — Formule de De Morgan

**Définition 3.6 — Différence de deux ensembles**

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On note  $A \setminus B$  (*A privé de B*) l'ensemble des éléments de  $A$  n'appartenant pas à  $B$ .

$$A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

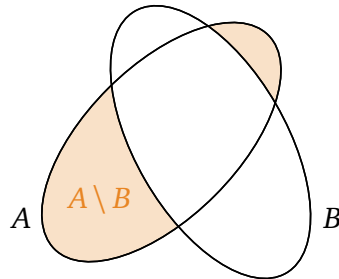


FIGURE I.4 — Différence de deux ensembles

**Définition 3.7 — Ensembles disjoints**

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

$A$  et  $B$  sont *disjoints* si  $A \cap B = \emptyset$ .

On peut aussi dire que  $A$  et  $B$  sont disjointes si  $A \in \bar{B}$  ou encore si  $B \in \bar{A}$  (définitions équivalentes).

## IV — Produit cartésien

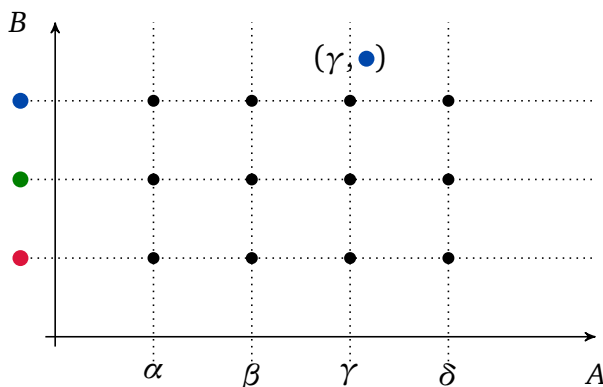
### Définition 4.1 — Produit cartésien

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On appelle *produit cartésien de  $A$  et de  $B$*  et on note  $A \times B$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  avec  $x \in A$  et  $y \in B$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  ensembles. On appelle *produit cartésien de  $A_1, A_2, \dots, A_n$*  et on note  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$ .

On note  $A \times A = A^2, A \times A \times A = A^3$ , etc. Par convention  $A^1$  est identifié à  $A$ . On parle indifféremment de  $n$ -liste ou de  $n$ -uplet d'éléments de  $A$ .

On appelle  $A \times B$  le produit cartésien de  $A$  et de  $B$ , car ses éléments  $(x, y)$  peuvent être compris comme des points de coordonnées un peu spéciales. Par exemple, avec  $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $B = \{\bullet, \color{green}\bullet, \color{blue}\bullet\}$ .



## V — Partition

### Définition 5.1 — Partition d'un ensemble

Soit  $E$  un ensemble,  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  parties de  $E$ . On dit que ces  $n$  parties forment une *partition* de  $E$  si et seulement si

1) elles sont non vides :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad A_i \neq \emptyset$$

2) elles sont disjointes deux à deux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

3) elles recouvrent  $E$  :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$$

Ces parties forment comme un système de casier qui recouvre complètement  $E$ .

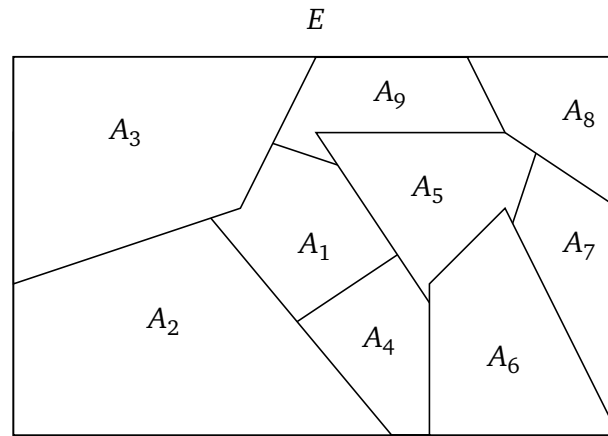


FIGURE I.5 — *Partition d'un ensemble.*

### Exemple

- Par exemple, si  $E = \{1, \dots, 7\}$  :
  - $A = \{1, 4, 5, 7\}$ ,  $B = \{2, 6\}$ , et  $C = \{3\}$  forment une partition de  $E$  ;
  - $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{2, 6\}$ , et  $C = \{3\}$  ne forment pas une partition de  $E$  ;
  - $A = \{1, 4, 7\}$ ,  $B = \{2, 6\}$ , et  $C = \{3\}$  ne forment pas non plus une partition de  $E$ .
- Mais aussi toutes parties définies par disjonction de cas.