

Ensembles

BCPST I — 27 février 2017

Dans le chapitre Logique nous avons vu les fondements « intellectuels » des mathématiques modernes. Nous en voyons maintenant les fondements « formels », le langage dans lequel les mathématiciens travaillent : la Théorie des Ensembles.

I — Définition d'un ensemble ?

La notion d'ensemble est difficile à définir de façon rigoureuse. Nous considérerons simplement qu'un **ensemble** est une collection d'objets.

Lorsque un objet x fait partie de la collection E , on dit que « x est un élément de l'ensemble E » et on note « $x \in E$ ». Si x ne fait pas partie de la collection E on note « $x \notin E$ ».

On admet l'existence d'un **ensemble vide**, noté \emptyset . C'est l'unique ensemble tel que $x \in \emptyset$ est faux, quelque soit l'objet x . Bien qu'en apparence paradoxal, cet ensemble est très utile !

En général, les ensembles que nous manipulerons seront définis comme des sous-ensemble d'ensembles bien connus comme \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{R}^3 , etc.

À l'aide d'un prédicat On peut définir un sous-ensemble de manière implicite par une propriété. Par exemple « l'ensemble des nombres impairs », « l'ensemble des entiers qui sont des carrés parfaits », « l'ensemble des réels dont le carré est strictement négatifs ».

Il est plus intéressant de traduire cette propriété sous forme mathématique. Nous emploierons plutôt la notation suivante :

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \text{ est impair} \} \\B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = 2x + 1\} \\C &= \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^2 < 0\}\end{aligned}$$

On parle de **définition d'un ensemble en compréhension**.

L'intérêt, c'est que l'on voit tout de suite comment raisonner cet ensemble : « Soit $(x, y) \in B$, alors $y = 2x + 1$ et... »

La difficulté d'une telle définition implicite est qu'elle peut très bien ne rien définir. Par exemple l'ensemble C défini ci-dessus est l'ensemble vide. On devra toujours penser à vérifier que l'ensemble défini n'est pas vide, sous peine de démarrer un raisonnement par une proposition fausse... on en connaît les conséquences !

Par paramétrisation Cette fois ci on décrit un ensemble comme l'image d'un autre ensemble par une opération.

$$E = \{(t, 2t + 1), t \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{(\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{(e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}), t \in \mathbb{R}\}$$

Cette définition en apparence peu claire est très utile en pratique quand il s'agit de mener des calculs.

Un même ensemble peut avoir plusieurs définitions différentes. Ainsi

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}\}$$

sont trois définitions différentes d'un même ensemble : le cercle trigonométrique.

- Exercice 1**
1. Qu'est-ce qu'un nombre pair ? Un nombre impair ?
 2. On note P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs. Démontrer que
 - a) $\forall n \in P, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$;
 - b) $\forall n \in I, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$;
 - c) $\forall n \in I, \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k - 1$.

II — Parties d'un ensemble

Définition 2.1 — Sous-ensemble

Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de E si et seulement si

$$\forall x \in F, \quad x \in E$$

ou encore « $x \in F \implies x \in E$ ». On note alors $F \subset E$.

Pour démontrer que F est un sous-ensemble de E , on doit prendre un élément quelconque de F et on montre qu'il est dans E .

Exercice 2 Soit E l'ensemble des nombre premiers et F l'ensemble des nombres impairs. Est-ce que $E \subset F$? Est-ce que $F \subset E$?

Exercice 3 Soit E un ensemble. Est ce que $\emptyset \subset E$?

Exercice 4 Soit $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{6^k, k \in \mathbb{N}^*\}$.
Est-ce que $A \subset B$? Est-ce que $B \subset A$?

Définition 2.2 — Ensemble des sous-ensembles

Les sous-ensembles de E forment une collection d'objet. C'est donc un ensemble : l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$.

| **Exemple** Si $E = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, (a), (b), (c), (a, b), (a, c), (b, c), (a, b, c)\}$.

Exercice 5 Écrire $\mathcal{P}(E)$ avec $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
C'est pénible, n'est-ce-pas ?

Propriété 2.3 — Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Ainsi pour montrer que deux ensembles sont égaux, on prend un élément quelconque de l'un, et on vérifie qu'il est dans l'autre, puis on recommence dans l'autre sens.

Exercice 6 Vérifier que les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x + 2\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 2x - 4y = 0\}$$

sont bien égaux.

III — Union, intersection

Définition 3.1 — Union et intersection de deux ensembles

Soit E et F deux ensembles

– On appelle *union* de E et de F et on note $E \cup F$ l'ensemble

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

– On appelle *intersection* de E et de F et on note $E \cap F$ l'ensemble

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

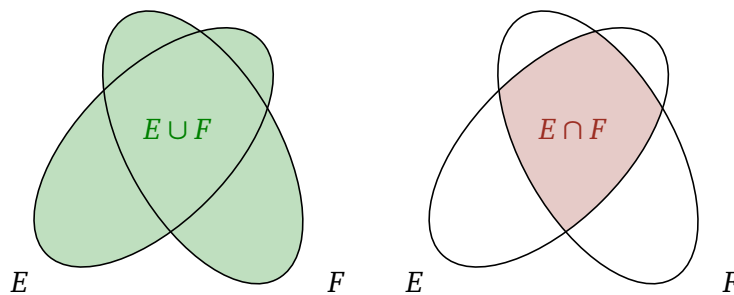


FIGURE I.1 — Union et intersection

Propriété 3.2 — Soit A , B et C trois ensembles

	$A \cap \emptyset = \emptyset$	et	$A \cup \emptyset = A$
commutativité	$A \cap B = B \cap A$	et	$A \cup B = B \cup A$
associativité	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		
	et	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		
	et	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	

Dém. Les deux premiers sont évidents. Pour les deux derniers, on utilise les propriétés de « et » et « ou » vu dans le cours de Logique.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in A \cap B \text{ et } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \end{aligned}$$

$$\iff x \in A \text{ et } x \in B \cap x \in C$$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \quad \square \end{aligned}$$

Définition 3.3 — Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . On appelle *complémentaire de A dans E* et on note $\complement_E A$ l'ensemble

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible (c'est-à-dire lorsque que E peut-être sous-entendu), on note plus simplement $\complement A$ ou encore \bar{A} .

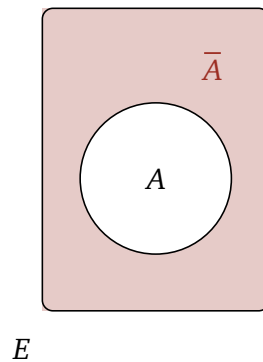


FIGURE I.2 — Complémentaire d'un ensemble

| **Exemple** Le complémentaire de \emptyset dans E est E et vice-versa.

Propriété 3.4 — Formules de De Morgan

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E .

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Dém. Le complémentaire correspond au « non » logique.

La seconde propriété se démontre en appliquant la première à \bar{A} et \bar{B} et en passant au complémentaire. \square

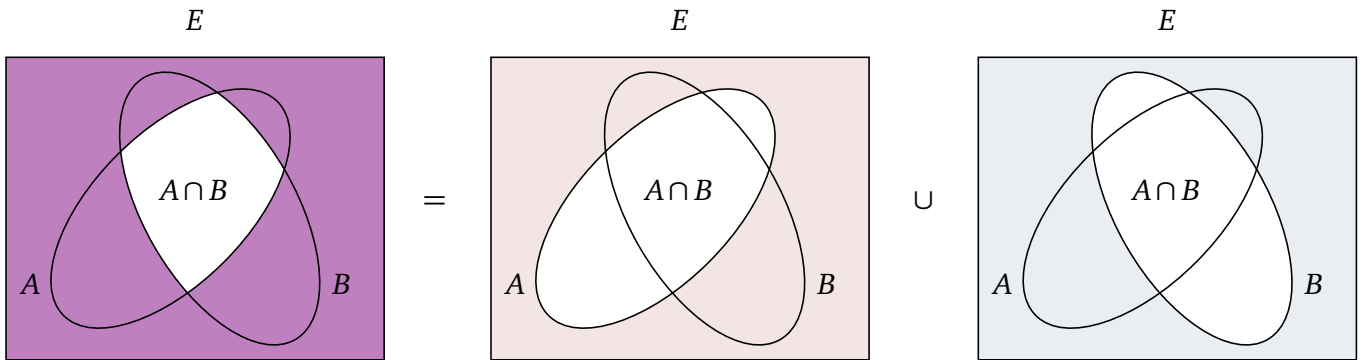


FIGURE I.3 — Formule de De Morgan

Définition 3.5 — Différence de deux ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . On note $A \setminus B$ (*A privé de B*) l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B .

$$A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

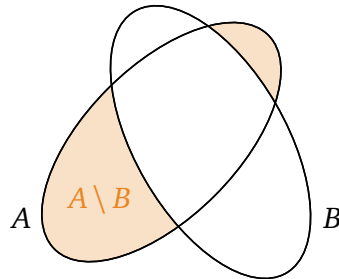


FIGURE I.4 — Différence de deux ensembles

Définition 3.6 — Ensembles disjoints

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E .

A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.

On peut aussi dire que A et B sont disjointes si $A \in \bar{B}$ ou encore si $B \in \bar{A}$ (définitions équivalentes).

IV — Produit cartésien

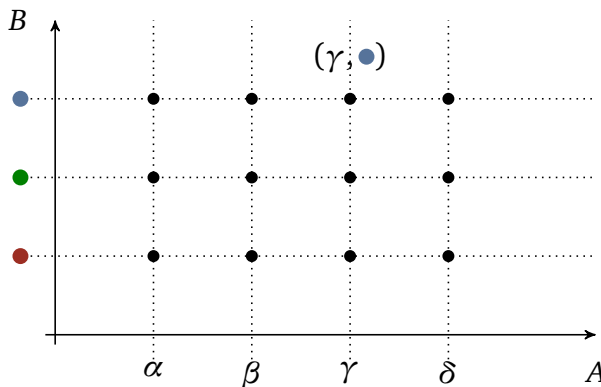
Définition 4.1 — Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien de A et de B* et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.

Soit n un entier naturel non nul, A_1, A_2, \dots, A_n n ensembles. On appelle *produit cartésien de A_1, A_2, \dots, A_n* et on note $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ l'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$.

On note $A \times A = A^2, A \times A \times A = A^3$, etc. Par convention A^1 est identifié à A . On parle indifféremment de n -liste ou de n -uplet d'éléments de A .

On appelle $A \times B$ le produit cartésien de A et de B , car ses éléments (x, y) peuvent être compris comme des points de coordonnées un peu spéciales. Par exemple, avec $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $B = \{\bullet, \color{green}\bullet, \color{blue}\bullet\}$.



V — Partition

Définition 5.1 — Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n n parties de E . On dit que ces n parties forment une *partition* de E si et seulement si

1) elles sont non vides :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad A_i \neq \emptyset$$

2) elles sont disjointes deux à deux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

3) elles recouvrent E :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$$

Ces parties forment comme un système de casier qui recouvre complètement E .

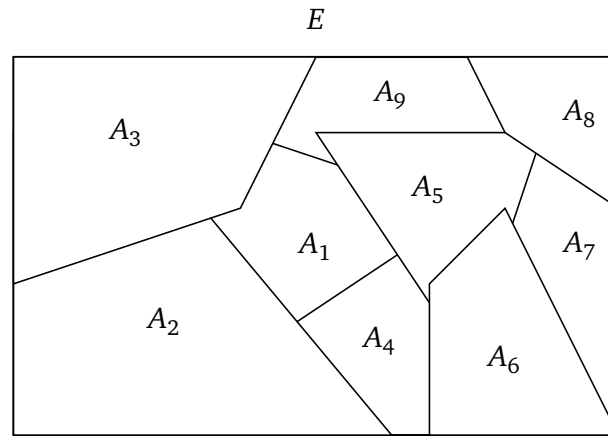


FIGURE I.5 — *Partition d'un ensemble.*

Exemple

- Par exemple, si $E = \{1, \dots, 7\}$:
 - $A = \{1, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ forment une partition de E ;
 - $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ ne forment pas une partition de E ;
 - $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{2, 6\}$, et $C = \{3\}$ ne forment pas non plus une partition de E .
- Mais aussi toutes parties définies par disjonction de cas.