

# FONCTIONS DÉRIVABLES

BCPST I, 26/12/2017

NOTATIONS DU CHAPITRE — Dans tout ce chapitre  $I$  est un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et non réduit à un point,  $x_0$  est un point de  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé donné.

## I — NOMBRE DÉRIVÉ EN UN POINT

### I.1 — DÉFINITION

Soit  $M_0$  le point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, f(x))$ .

Alors  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est le coefficient directeur de la corde  $[MM_0]$  de  $\mathcal{C}_f$ .

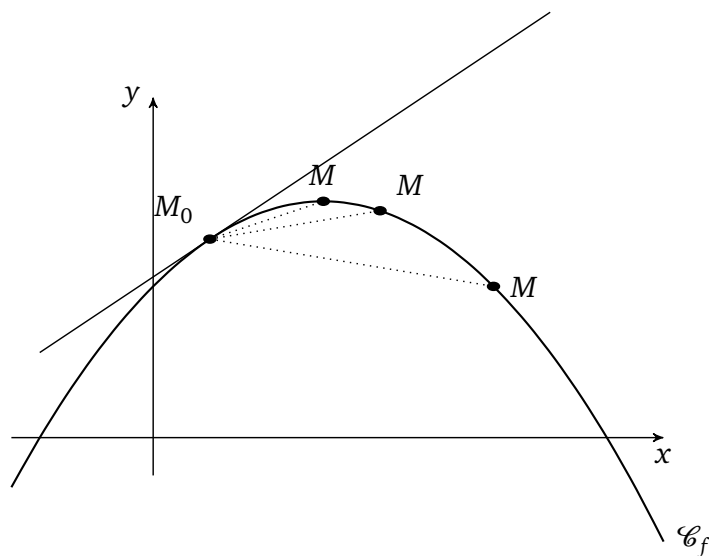


FIGURE I.1 — Corde, tangente et dérivabilité

Faisons alors tendre  $x$  vers  $x_0$ . La corde peut admettre une position limite lorsque  $M$  se rapproche de  $M_0$ . Cette position limite s'appelle la **tangente** de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Si cette position limite n'est pas verticale, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} m \in \mathbb{R}$$

où  $m$  est la pente de la tangente en  $x_0$  à  $\mathcal{C}_f$ .

En notant  $f'(x_0)$  cette limite, l'équation de la tangente en  $x_0$  s'écrit

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

**DÉFINITION I.1 — NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT**

La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en  $x_0$ .

Dans ce cas, cette limite se note  $f'(x_0)$  et s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{sous réserve d'existence})$$

On peut aussi noter  $f'(x_0) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x_0}$ . La notation  $df$  désignait autrefois un accroissement infinitésimal de la « variable »  $f$ . On voit bien, sur cette notation, l'idée de coefficient directeur au sens « infinitésimal » du terme.

Notez l'importance de l'hypothèse «  $I$  non réduit à un point » : il faut pouvoir prendre au moins deux points de l'intervalle pour que les notions de corde et de tangente aient un sens.

**THÉORÈME I.2 — TANGENTE EN UN POINT DE  $\mathcal{C}_f$**

La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente non verticale au point  $(x_0, f(x_0))$ .

Par ailleurs  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$  si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente verticale en  $x_0$ .

DÉM. □

**EXEMPLE**

- Une fonction constante  $x \mapsto a$  est dérivable en tout point : sa dérivée est nulle (réciproque à venir !)
- la fonction  $x \mapsto x^n$  en un point  $x_0$  quelconque, par le binôme de Newton

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{1}{h} \left( x_0^n + nhx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n \right)$$

$$= nx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} - x_0^n$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1}$$

– la fonction  $x \mapsto 1/x$  en tout point non nul  $x_0$  :

$$\frac{1}{h} \left( \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{-h}{hx_0(x_0+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x_0^2}$$

– la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  en tout point  $x_0$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , par la méthode de la quantité conjuguée :

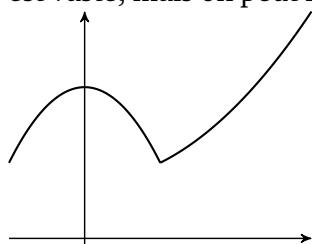
$$\frac{1}{h} (\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}) = \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

– La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  admet une tangente verticale en 0.

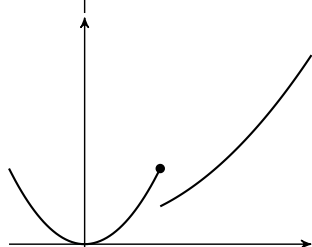
– la fonction cos, mais ce n'est pas démontrable sans définition propre du cos.



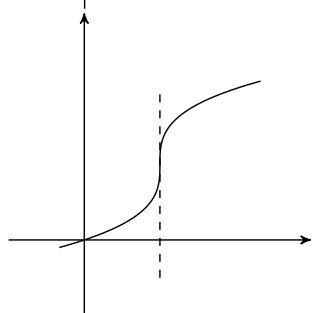
**En pratique** Qu'est-ce qu'une fonction non dérivable en un point ? La question est vaste, mais on peut imaginer quelques cas simples.



La fonction présente un brusque changement de direction, un «rebond». Le taux d'accroissement a une limite différente à gauche et à droite.



La fonction présente une déchirure. Le taux d'accroissement a une limite infinie à droite (mais finie à gauche).



La tangente est verticale en un point. Le taux d'accroissement admet des limites infinies à gauche et à droite.

## I.2 — DÉRIVATION ET CONTINUITÉ

Le second exemple ci-dessus permet de comprendre que la continuité est une condition nécessaire de dérivabilité.

## THÉORÈME I.4 — DÉRIVABLE IMPLIQUE CONTINUE

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

DÉM. En effet, on peut écrire, sur un voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , en faisant tendre  $x$  vers  $x_0$  le terme le plus à droite va tendre vers  $0 \times f'(x_0)$ , c'est-à-dire 0. Ainsi  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ , ce qui établit la continuité de  $f$ .  $\square$

Intrinsèquement, on a utilisé le développement limité d'ordre 1 de  $f$  en  $x_0$ .

La réciproque est fautive. La fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$  est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

COROLLAIRE I.5 — Si une fonction  $f$  est dérivable sur un domaine  $\mathcal{D}$  alors elle est continue sur  $\mathcal{D}$ .

## I.3 — DÉRIVABILITÉ À GAUCHE, À DROITE

## DÉFINITION I.6 — DÉRIVABILITÉ À GAUCHE, À DROITE.

On dit que  $f$  est **dérivable à gauche** en  $x_0$  (resp. **à droite** en  $x_0$ ) si et seulement si la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche en  $x_0$  (resp. une limite finie à droite en  $x_0$ ).

PROPRIÉTÉ I.7 — La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et que  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

Graphiquement, si les dérivées à gauche et à droite sont différentes, cela signifie que  $\mathcal{C}_f$  « fait un angle » en  $x_0$ .

EXEMPLE La fonction  $f : x \mapsto |x|$ .

## II — FONCTION DÉRIVÉE

## II.1 — DÉFINITION

DÉFINITION 2.1 — DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE – FONCTION DÉRIVÉE

Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$  on dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$** .

La fonction  $f'$  définie par  $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$  est la **fonction dérivée** de  $f$ .

EXEMPLE Les fonctions usuelles : voir tout bon formulaire.

**Dérivées successives**

- Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et que  $f'$  est également dérivable sur  $I$ , on dit que  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ , et la dérivée de  $f'$  se note  $f''$  ou  $f^{(2)}$ . C'est la **dérivée seconde** de  $f$  sur  $I$ .
- On définit ainsi de proche en proche les dérivées d'ordre 3, 4, etc. de  $f$ . La **fonction dérivée d'ordre  $n$**  de  $f$  se note  $f^{(n)}$ . Par exemple :  $f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$ , etc.

DÉFINITION 2.3 — FONCTION DE CLASSE  $C^n$  SUR  $I$

Une fonction  $f$  est **de classe  $C^n$  sur  $I$**  si et seulement si  $f$  est dérivable  $n$  fois sur  $I$  et que la dérivée  $n$ -ième de  $f$  est continue sur  $I$ . L'ensemble des fonctions de classe  $C^n$  sur  $I$  se note  $C^n(I)$ .

La fonction  $f$  est **de classe  $C^\infty$  sur  $I$**  si et seulement si  $f$  est dérivable  $n$  fois, pour tout entier naturel  $n$ . L'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $I$  se note  $C^\infty(I)$ .

EXEMPLE

- Les fonctions polynômiales, la fonction exponentielle, les fonctions sin et cos sont réputées  $C^\infty(\mathbb{R})$ .
- Il est facile d'exhiber une fonction qui n'est pas  $C^1(\mathbb{R})$  en prenant une fonction qui n'est pas dérivable, comme par exemple  $x \mapsto |x|$ .
- En revanche il est moins évident de trouver une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais dont la dérivée n'est pas continue. En voici une

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Nous l'étudierons un peu plus loin.

## II.2 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

## PROPRIÉTÉ 2.5 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES (I)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- 1) La fonction  $\lambda f$  est dérivable sur  $I$ , de fonction dérivée  $\lambda f'$ ;
- 2) la fonction  $f + g$  est dérivable sur  $I$ , de fonction dérivée  $f' + g'$ ;
- 3) la fonction  $f \times g$  est dérivable sur  $I$ , de fonction dérivée  $f \times g' + f' \times g$ .

DÉM. Les deux premiers découlent des propriétés sur la limite. La troisième se démontre facilement

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= g(x_0+h) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

en utilisant la continuité de  $g$  en  $x_0$ . □

COROLLAIRE 2.6 — L'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

## PROPRIÉTÉ 2.7 — OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES (II)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivable sur  $I$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- 1) La fonction  $\lambda f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$ ;
- 2) la fonction  $f + g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ ;
- 3) la fonction  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable.

De même si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^\infty$  alors  $f + g$ ,  $\lambda f$  et  $f \times g$  sont de classe  $C^\infty$ .

COROLLAIRE 2.8 — L'ensemble des fonctions de classe  $C^n$  sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Idem pour les fonction  $C^\infty(I)$ .

Notez qu'il n'y pas de formule à notre disposition pour la dérivée d'ordre quelconque de  $f \times g$ ...

## II.3 — COMPOSITION

## PROPRIÉTÉ 2.9 — DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) \in J$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

DÉM. Démontrons ce résultat avec l'hypothèse supplémentaire que  $f(x) - f(x_0)$  est non nulle sur un voisinage de  $x_0$  privé de  $x_0$ . Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Le second terme tend vers  $f'(x_0)$ . Quand au premier, par le théorème de composée des limites, on a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$  par continuité de  $f$  en  $x_0$ , donc ce terme tend vers  $g'(f(x_0))$ .  $\square$

## EXEMPLE

– Si  $f$  est dérivable et ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $1/f$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée vaut  $-f'/f^2$ .

On obtient ce résultat en composant  $f$  à gauche par la fonction  $x \mapsto 1/x$ .

– Si  $f$  est dérivable et ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\ln|f|$  est dérivable sur  $I$  et  $(\ln|f|)' = f'/f$  (dém.).

– Si  $n \in \mathbb{N}$  et si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f^n$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$

– Le résultat précédent est vrai avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f$  dérivable et strictement positive sur  $I$  :  $f^\alpha$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$  (à faire à la maison).

## PROPRIÉTÉ 2.II — DÉRIVÉE D'UN QUOTIENT

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$ .

Si la fonction  $f/g$  est définie sur  $I$ , alors  $f/g$  est dérivable sur  $I$ , de fonction dérivée

$$\frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

DÉM. À partir des résultats précédents, en utilisant la fonction  $1/f$  et la formule du produit des dérivées.  $\square$



**En pratique** Tous les théorèmes que l'on vient de voir permettent de prouver qu'une fonction est dérivable et de calculer en même temps sa dérivée. Revenons

par exemple à la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \quad x \longmapsto \sin(x) \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = a(x) \times b(c(x))$$

Comme les trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , il en est de même de la fonction  $f$ . Par les règles de calcul usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = a'(x)b(c(x)) + a(x)c'(x)b'(c(x)) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

En 0 les théorèmes précédents n'apportent pas d'information. Mais cela ne veut pas dire qu'on ne peut rien dire. Revenons à la définition de la dérivabilité pour étudier le point 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

en reconnaissant le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée.

Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

Toutefois  $f'$  n'a pas de limite en 0. Comme  $f'$  n'est pas continue en 0, on vient d'établir que  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### II.4 — DÉRIVÉE DE LA BIJECTION RÉCIPROQUE

##### THÉORÈME 2.12 — DÉRIVÉE DE LA BIJECTION RÉCIPROQUE

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , dérivable et strictement monotone (dans ce cas  $f$  est bijective). Soit

$y_0 = f(x_0) \in f(I)$ .

Si  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

DÉM. Le taux d'accroissement en  $(y_0, f^{-1}(y_0))$  s'écrit

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y}$$



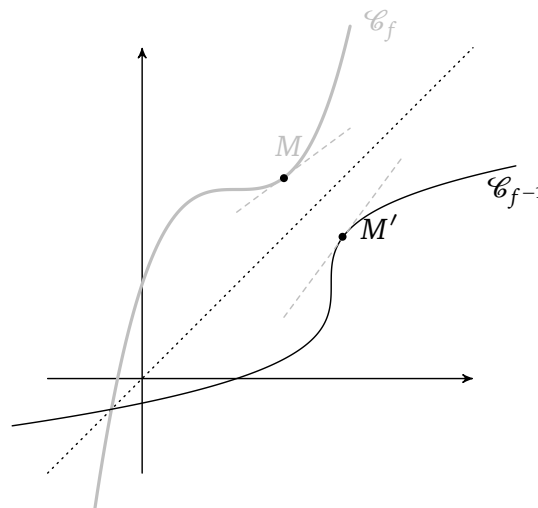
avec  $y \in f(I)$ , et  $y \neq y_0$ . Faisons alors le changement de variable  $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ . Le taux d'accroissement devient

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}$$

Remarque que cette expression est bien définie au voisinage de  $x_0$  (privé de  $x_0$ ), par injectivité de  $f$ .

On sait que  $f$  est continue sur  $I$  et donc que  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$ . Donc  $x \xrightarrow{y \rightarrow y_0} x_0$ . Ainsi le taux d'accroissement précédent tend vers  $1/f'(x_0)$  si  $f'(x_0) \neq 0$ . Dans ce cas  $f^{-1}$  est donc dérivable en  $y_0$  et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \square$$



Remarquez que si  $f'(x_0) = 0$ , comme  $f$  est monotone sur  $I$ , le taux d'accroissement de  $f$  est de signe constant. Ainsi il tend vers  $0+$  ou vers  $0-$ , et donc

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm \infty$$

La tangente  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  est verticale dans ce cas.

**EXEMPLE**

- Arcsin, Arctan, Arccos ont été vues dans le chapitre sur les fonctions usuelles ;
- À titre d'exemple, considérons la fonction  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la bijection réciproque de  $f$  :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y^3$$

Comme  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}$  l'est aussi.

La dérivée de  $f$  est  $f'(y) = 3y^2$ . Elle s'annule uniquement en 0. Donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}^*$ . Dans ce cas

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

### III — THÉORÈME DE ROLLE & CONSÉQUENCES

Nous voyons dans cette partie les théorèmes essentiels qui relient les propriétés d'une fonction aux propriétés de sa dérivée.

#### III.1 — EXTREMUM LOCAL D'UNE FONCTION

##### DÉFINITION 3.1 — EXTREMA LOCAUX

On dit que  $f$  admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en  $x_0$  si et seulement si il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[ \cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \\ \text{(resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

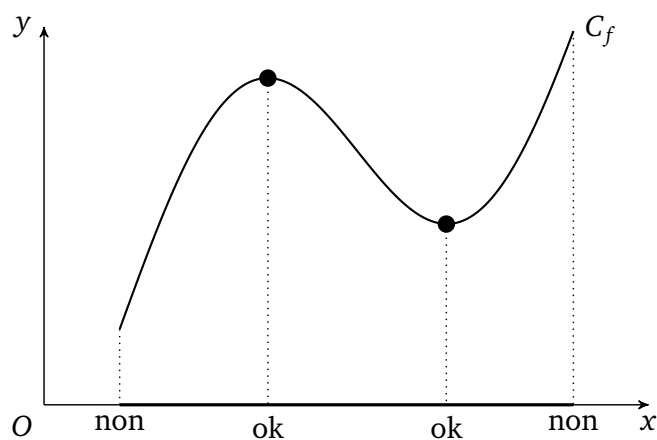


FIGURE I.2 — Extrema locaux

On notera que le maximum global de  $f$  sur  $I$  est à chercher à l'intérieur de  $I$  et aussi aux bornes.

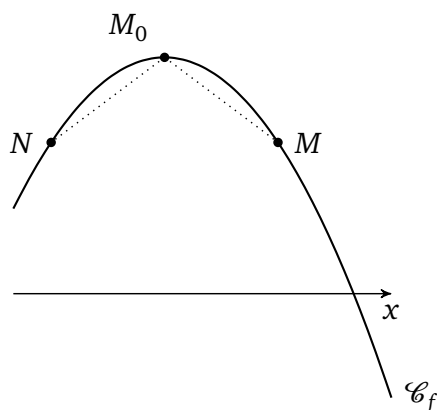


FIGURE I.3 — Démonstration du théorème de Rolle

**THÉORÈME 3.2** — Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point intérieur de  $I$  (c'est-à-dire pas une borne de  $I$ ). Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$  et si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

**DÉM.** En cas de maximum, la limite du taux d'accroissement est à la fois positive (en considérant sa limite à droite) et négative (en considérant sa limite à gauche) : elle est donc nulle. □

**Attention !** On prendra garde à ce que

1. Ce théorème ne concerne que les points intérieurs de  $I$ . Par exemple, la fonction  $f : \begin{cases} [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{cases}$  admet un extremum en 1, mais sa dérivée ne s'annule pas en 1.
2. Ce théorème ne concerne que les extremums où  $f$  est dérivable. Par exemple  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$  admet un extremum local en 0 sans y être dérivable.
3. Enfin ce théorème n'admet pas de réciproque. Par exemple  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$  vérifie

$f'(0) = 0$ , mais 0 n'est pas un extremum local de  $f$ .

Pour résumer, on cherchera les extremums d'une fonction à l'aide du tableau de variations...

## III.2 — THÉORÈME DE ROLLE

## THÉORÈME 3.3 — THÉORÈME DE ROLLE

Soit  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point,  $f$  une fonction dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ .

Si  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a ; b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

DÉM. Comme  $f$  est continue sur le segment  $[a ; b]$  elle est bornée et atteint ses bornes.

Si elle atteint son maximum ou son minimum en un point  $c \in ]a ; b[$  alors ce point est un extremum local. D'après le théorème précédent,  $f'(x) = 0$ .

Sinon elle atteint son maximum et son minimum sur  $\{a, b\}$ . Comme  $f(a) = f(b)$ , minimum et maximum sont confondus :  $f$  est donc constante et sa dérivée est nulle sur  $[a ; b]$ , d'où le résultat.  $\square$

**Attention !** L'hypothèse «  $I$  est un intervalle » est essentielle. Elle est implicite dans le fait que  $f$  est continue sur le segment  $[a ; b]$ . On verra des conséquences de ce point ci-dessous.

## III.3 — FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

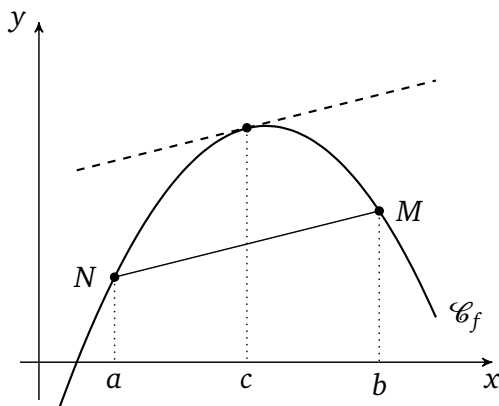
## THÉORÈME 3.4 — FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . Il existe  $c \in ]a ; b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉM. Ce théorème important a une interprétation géométrique simple : la corde entre deux points et parallèle à une tangente à la courbe prise entre ces deux points.



Ce qui peut nous donner l'idée de la démonstration. Utilisons la fonction annexe

$$g : \begin{cases} [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right] \end{cases}$$

C'est la différence entre la fonction et la corde entre  $a$  et  $b$ . Cette fonction est continue sur  $[a ; b]$ , dérivable sur  $]a ; b[$ . De plus  $g(a) = g(b) = 0$ . Il existe donc un point  $c$  de  $]a ; b[$  tel que  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

**COROLLAIRE 3.5** — Soit  $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. La fonction  $f'$  est nulle sur un intervalle  $I$  si et seulement si  $f$  est constante sur  $I$ .

**DÉM.** Dans le théorème précédent, on a  $m = M = 0$ , donc  $f(b) - f(a) = 0$  quelque soit  $a$  et  $b$ .  $\square$

**REMARQUE I.1** La fonction  $x \mapsto [x]$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et de dérivée nulle sur cet ensemble. Pourtant elle n'est pas constante... Le corollaire précédent est-il mis en défaut? Non, car  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  n'est pas un intervalle!

**COROLLAIRE 3.6** — Si  $f'$  est positive (resp. négative) sur  $I$  alors  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$ .

**DÉM.** Dans le théorème précédent  $m = 0$ . Ainsi  $f(b) - f(a) > 0$  si  $a > b$ . Ainsi  $f$  est croissante.  $\square$

**COROLLAIRE 3.7** — Si  $f'$  est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans  $I$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  (resp. strictement décroissante).

**THÉORÈME 3.8** — INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS - I  
Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . Si il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que

$$\forall x \in ]a ; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors 
$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

**DÉM.** D'après le théorème précédent, il existe  $c$  dans  $]a ; b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Comme 
$$m \leq f'(c) \leq M$$

On a 
$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

et 
$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a) \quad \text{car } b - a > 0.$$

□

La propriété reste bien sûr vraie avec des inégalités strictes. Notez l'importance de l'hypothèse  $a < b$ .

**THÉORÈME 3.9 — INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS – II**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a ; b[$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . Si il existe un réel  $M$  tel que

$$\text{alors } \forall x \in ]a ; b[, \quad |f'(x)| \leq M |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

## IV — RÉSUMÉ : PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.



**En pratique** Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ .** En décomposant  $f$  à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**  
On utilise les propriétés de  $f$  :
  - *périodicité de  $f$*  : si  $f$  est  $T$ -périodique (*i.e.* périodique de période  $T$ ), on limite  $\mathcal{D}_f$  à un intervalle de longueur  $T$  (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de  $f$  par translation.
  - *parité de  $f$*  : si  $f$  est paire ou impaire, on limite l'étude à  $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ . On en déduira les propriétés de  $f$  sur l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  par symétrie.
3. **Étude de la continuité de  $f$  et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude**  
Éventuellement, prolongement par continuité de  $f$  aux points où  $f$  n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge  $f$  par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).
4. **Étude de la dérivabilité de  $f$**

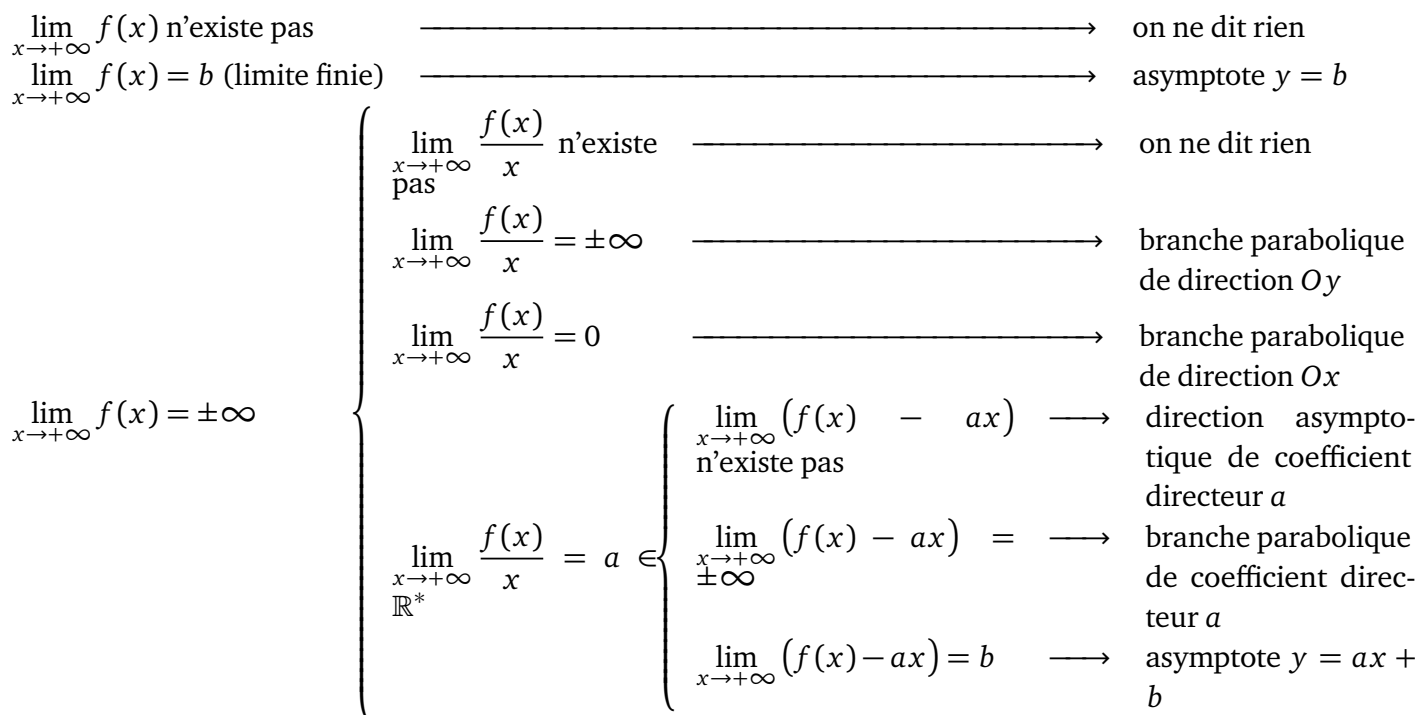


FIGURE I.4 — Plan d'étude des branches infinies

Aux points  $x_0$  où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si  $f$  est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi-tangentes.

5. **Étude de la monotonie de  $f$**

Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.

6. **Établissement du tableau de variation**

On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).

7. **Étude des branches infinies de  $\mathcal{C}_f$ .**

8. **Représentation graphique de  $\mathcal{C}_f$**

On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de  $f$ .

## V — COMPLÉMENT : FORMULES DE TAYLOR

Je voudrais clore ce chapitre sur une démonstration de la formule de Taylor-Young, que nous avons utilisé au chapitre sur les développements limités. Cette formule est hors programme !

### THÉORÈME 5.1 — FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^{n+1}$ . Pour tout réels distincts  $a$  et  $b$  dans  $I$ , il existe un réel  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

DÉM. Posons la fonction annexe

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

définie sur  $[a ; b]$ , continue et dérivable sur cet intervalle.

La constante réelle  $A$  est choisit telle que  $\varphi(a) = 0$ . Ainsi

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[ f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

On constate alors que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . D'après le thm de Rolle,  $\varphi'$  s'annule donc en un point  $c$  sur  $]a ; b[$ . Or, pour  $t$  dans  $[a ; b]$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \\ &= \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \end{aligned}$$

Donc en fait  $A = -f^{(n+1)}(c)$ . □

### THÉORÈME 5.2 — FORMULE DE TAYLOR-YOUNG



Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^{n+1}$ . Pour tout  $a$  et  $x$  dans  $I$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$$

avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

DÉM. C'est une conséquence directe de la formule de Taylor-Lagrange : comme  $f$  est de classe  $C^{n+1}$ , la fonction  $f^{(n+1)}$  est bornée sur  $[a ; b]$ , etc.  $\square$