Fonctions dérivables

BCPST 1 — 27 février 2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et* non réduit à un point, *x_0 est un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

I.1 — Définition

Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Alors $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le coefficient directeur de la corde $[MM_0]$ de $\mathscr{C}_f$.

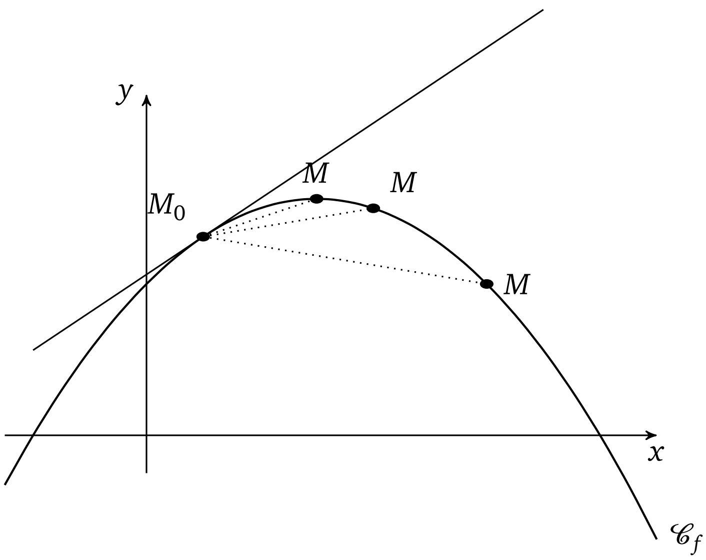


FIGURE I.1 — *Corde, tangente et dérivabilité*

Faisons alors tendre x vers x_0. La corde peut admettre une position limite lorsque M se rapproche de M_0. Cette position limite s'appelle la tangente de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Si cette position limite n'est pas verticale, alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} m \in \mathbb{R}$$

où m est la pente de la tangente en x_0 à $\mathscr{C}_f$.
En notant $f'(x_0)$ cette limite, l'équation de la tangente en x_0 s'écrit

$$y = f'(x_0)\times(x-x_0)+f(x_0)$$

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie en x_0.
Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \textit{(sous réserve d'existence)}$$

On peut aussi noter $f'(x_0) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x_0}$. La notation d$f$ désignait autrefois un accroissement infinitésimal de la « variable » f. On voit bien, sur cette notation, l'idée de coefficient directeur au sens « infinitésimal » du terme.

Notez l'importance de l'hypothèse « I non réduit à un point » : il faut pouvoir prendre au moins deux points de l'intervalle pour que les notions de corde et de tangente aient un sens.

Théorème 1.2 — Tangente en un point de $\mathscr{C}_f$

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale *au point $(x_0, f(x_0))$.*

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en x_0.

Dém. □

Exemple

- Une fonction constante $x \mapsto a$ est dérivable en tout point : sa dérivée est nulle (réciproque à venir !)

– la fonction $x \mapsto x^n$ en un point x_0 quelconque, par le binôme de Newton

$$\begin{aligned}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} &= \frac{1}{h}\left(x_0^n + nhx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} - x_0^n\right)\\ &= nx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} - x_0^n\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} nx_0^{n-1}\end{aligned}$$

– la fonction $x \mapsto 1/x$ en tout point non nul x_0 :

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{-h}{hx_0(x_0+h)} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{x_0^2}$$

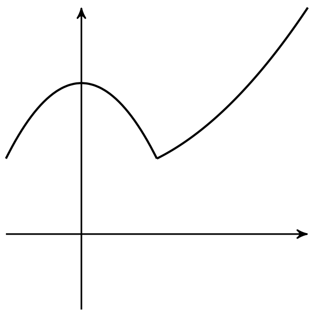
– la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$, par la méthode de la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{h}\left(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}\right) = \frac{1}{h}\frac{h}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+h}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

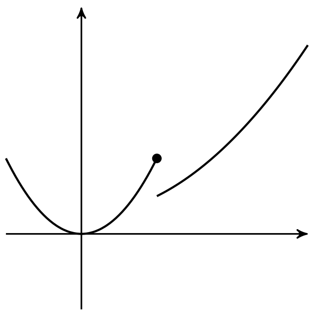
– La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.

– la fonction cos, mais ce n'est pas démontrable sans définition propre du cos.

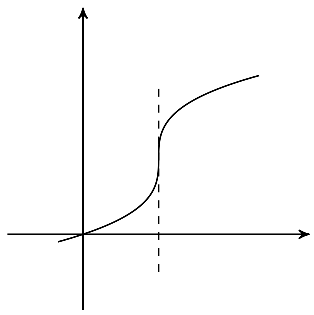
En pratique Qu'est-ce qu'une fonction non dérivable en un point ? La question est vaste, mais on peut imaginer quelques cas simples.



La fonction présente un brusque changement de direction, un « rebond ». Le taux d'accroissement à une limite différente à gauche et à droite.



La fonction présente une déchirure. Le taux d'accroissement a une limite infinie à droite (mais finie à gauche).



La tangente est verticale en un point. Le taux d'accroissement admet des limites infinies à gauche et à droite.

I.2 — Dérivation et continuité

Le second exemple ci-dessus permet de comprendre que la continuité est une condition nécessaire de dérivabilité.

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Dém. En effet, on peut écrire, sur un voisinage de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f est dérivable en x_0, en faisant tendre x vers x_0 le terme le plus à droite va tendre vers $0 \times f'(x_0)$, c'est-à-dire 0. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, ce qui établit la continuité de f. □

Intrinsèquement, on a utilisé le développement limité d'ordre 1 de f en x_0.

La réciproque est fausse. La fonction $f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Corollaire 1.4 — *Si une fonction f est dérivable sur un domaine $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$.*

I.3 — Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 1.5 — Dérivabilité à gauche, à droite.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 (resp. à droite en x_0) si et seulement si la fonction

$$\varphi \ : \ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).

Propriété 1.6 — *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

Graphiquement, si les dérivées à gauche et à droite sont différentes, cela signifie que $\mathscr{C}_f$ « fait un angle » en x_0.

Exemple La fonction $f : x \mapsto |x|$.

II — Fonction dérivée

II.1 — Définition

Définition 2.1 — **Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée**

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I.

La fonction f' définie par $f' : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ *est la fonction dérivée de f.*

Exemple Les fonctions usuelles : voir tout bon formulaire.

Dérivées successives

- Si f est dérivable sur I et que f' est également dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la dérivée de f' se note f'' ou $f^{(2)}$. C'est la dérivée seconde de f sur I.
- On définit ainsi de proche en proche les dérivées d'ordre 3, 4, etc. de f. La fonction dérivée d'ordre n de f se note $f^{(n)}$. Par exemple : $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc.

Définition 2.2 — **Fonction de classe C^n sur I**

Une fonction f est de classe C^n sur I si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n–ième de f est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Exemple

- Les fonctions polynômiales, la fonction exponentielle, les fonctions sin et cos sont réputées $C^\infty(\mathbb{R})$.
- Il est facile d'exhiber une fonction qui n'est pas $C^1(\mathbb{R})$ en prenant une fonction qui n'est pas dérivable, comme par exemple $x \mapsto |x|$.

– En revanche il est moins évident de trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas continue. En voici une

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Nous l'étudierons un peu plus loin.

II.2 — Opérations algébriques

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est dérivable sur I, de fonction dérivée $\lambda f'$;*
2) *la fonction $f + g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' + g'$;*
3) *la fonction $f \times g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.*

Dém. Les deux premier découlent des propriétés sur la limite. La troisième se démontre facilement

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= g(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)\frac{g(x_0+h)g(x_0)}{h} \\
&\xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de g en x_0. □

Corollaire 2.4 — *L'ensemble des fonctions dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.*

Propriété 2.5 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;*
2) *la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;*
3) *la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.*

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f+g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞.

Corollaire 2.6 — *L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Idem pour les fonction $C^\infty(I)$.*

Notez qu'il n'y pas de formule à notre disposition pour la dérivée d'ordre quelconque de $f \times g$...

II.3 — Composition

Propriété 2.7 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Dém. Démontrons ce résultat avec l'hypothèse supplémentaire que $f(x) - f(x_0)$ est non nulle sur un voisinage de x_0 privé de x_0. Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Le second terme tend vers tend vers $f'(x_0)$. Quand au premier, par le théorème de composée des limites, on a $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ par continuité de f en x_0, donc ce terme tend vers $g'(f(x_0))$. □

Exemple

- Si f est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $-f'/f^2$.
  On obtient ce résultat en composant f à gauche par la fonction $x \mapsto 1/x$.
- Si f est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors $\ln|f|$ est dérivable sur I et $(\ln|f|) = f'/f$ (dém.).
- Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est dérivable sur I, alors f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$
- Le résultat précédent est vrai avec $\alpha \in \mathbb{R}$, f dérivable et strictement positive sur I : f^α est dérivable sur I et $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$ (à faire à la maison).

Propriété 2.8 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.

Si la fonction f/g est définie sur I, alors f/g est dérivable sur I, de fonction dérivée $\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Dém. À partir des résultats précédents, en utilisant la fonction $1/f$ et la formule du produit des dérivées. □

En pratique Tous les théorèmes que l'on vient de voir permettent de prouver qu'une fonction est dérivable et de calculer en même temps sa dérivée. Revenons par exemple à la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \quad 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Posons

$$a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. \qquad b : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad c : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = a(x) \times b(c(x))$$

Comme les trois fonctions a, b et c sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de la fonction f. Par les règles de calcul usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = a'(x)b(c(x)) + a(x)c'(x)b'(c(x)) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

En 0 les théorèmes précédents n'apportent pas d'information. Mais cela ne veut pas dire qu'on ne peut rien dire. Revenons à la définition de la dérivabilité pour étudier le point 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

en reconnaissant le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Toutefois f' n'a pas de limite en 0. Comme f' n'est pas continue en 0, on vient d'établir que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.4 — Dérivée de la bijection réciproque

Théorème 2.9 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f\langle I \rangle$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Dém. Le taux d'accroissement en $(y_0, f^{-1}(y_0))$ s'écrit

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y}$$

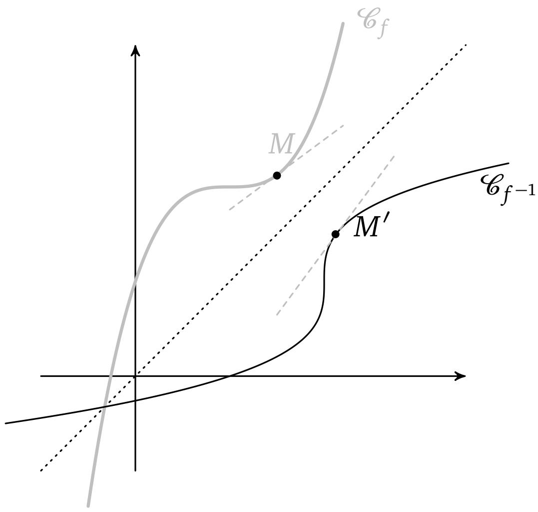
avec $y \in f\langle I\rangle$, et $y \neq y_0$. Faisons alors le changement de variable $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Le taux d'accroissement devient

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}$$

Remarquer que cette expression est bien définie au voisinage de x_0 (privé de x_0), par injectivité de f.

On sait que f est continue sur I et donc que f^{-1} est continue sur $f\langle I\rangle$. Donc $x \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0$. Ainsi le taux d'accroissement précédent tend vers $1/f'(x_0)$ si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas f^{-1} est donc dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad \square$$



Remarquez que si $f'(x_0) = 0$, comme f est monotone sur I, le taux d'accroissement de f est de signe constant. Ainsi il tend vers 0+ ou vers 0−, et donc

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$$

La tangente $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est verticale dans ce cas.

Exemple

- Arcsin, Arctan, Arccos ont été vues dans le chapitre sur les fonctions usuelles ;
- À titre d'exemple, considérons la fonction $f^{-1} \quad : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{array} \right.$, la bijection réciproque de $f \quad : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^3 \end{array} \right.$.

  Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f^{-1} l'est aussi.
  La dérivée de f est $f'(y) = 3y^2$. Elle s'annule uniquement en 0. Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}^*$. Dans ce cas

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

III — Théorème de Rolle & conséquences

Nous voyons dans cette partie les théorèmes essentiels qui relient les propriétés d'une fonctions aux propriétés de sa dérivée.

III.1 — Extremum local d'une fonction

Définition 3.1 — Extrema locaux

On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha[\, \cap I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$

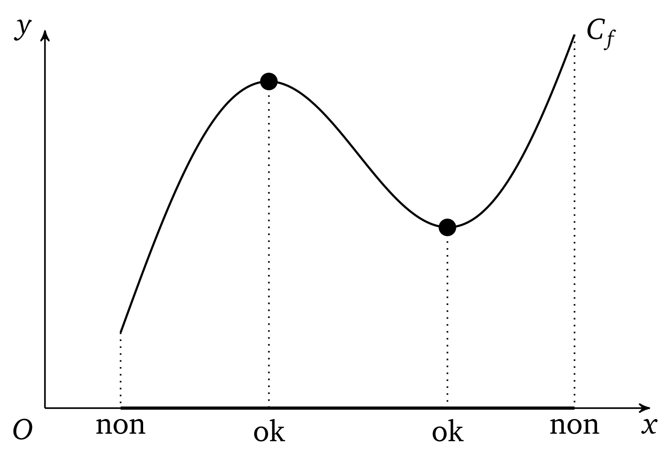


Figure I.2 — *Extrema locaux*

On notera que le maximum *global* de f sur I est à chercher à l'intérieur de I et aussi aux bornes.

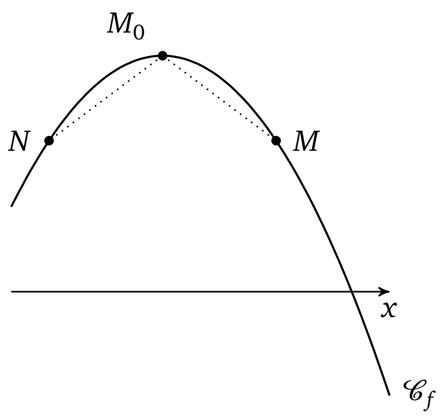


FIGURE I.3 — *Démonstration du théorème de Rolle*

Théorème 3.2 — *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire* pas une borne *de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Dém. En cas de maximum, la limite du taux d'accroissement est à la fois positive (en considérant sa limite à droite) et négative (en considérant sa limite à gauche) : elle est donc nulle. □

Attention ! On prendra garde à ce que

1. Ce théorème ne concerne que les points intérieurs de I. Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{|l} [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto x \end{array}$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée ne s'annule pas en 1.
2. Ce théorème ne concerne que les extremums où f est dérivable. Par exemple $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$ admet un extremum local en 0 sans y être dérivable.
3. Enfin ce théorème n'admet pas de réciproque. Par exemple $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$ vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local de f.

Pour résumer, on cherchera les extremums d'une fonction à l'aide du tableau de variations…

III.2 — Théorème de Rolle

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dém. Comme f est continue sur le segment $[\,a\,;\,b\,]$ elle est bornée et atteint ses bornes.

Si elle atteint son maximum ou son minimum en un point $c \in]\,a\,;\,b\,[$ alors ce point est un extremum local. D'après le théorème précédent, $f'(x) = 0$.

Sinon elle atteint son maximum et son minimum sur $\{a,b\}$. Comme $f(a) = f(b)$, minimum et maximum sont confondus : f est donc constante et sa dérivée est nulle sur $[\,a\,;\,b\,]$, d'où le résultat. □

Attention ! L'hypothèse « I est un intervalle » est essentielle. Elle est implicite dans le fait que f est continue sur le segment $[\,a\,;\,b\,]$. On verra des conséquences de ce point ci-dessous.

III.3 — Formule des accroissements finis

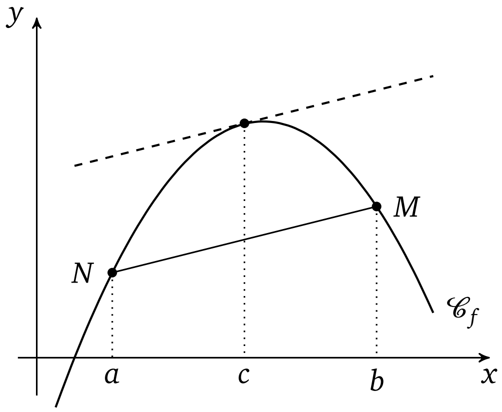
Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dém. Ce théorème important a un interprétation géométrique simple : la corde entre deux points et parallèle à une tangente à la courbe prise entre ces deux points.



Ce qui peut nous donner l'idée de la démonstration. Utilisons la fonction annexe

$$g \ : \left| \begin{array}{rcl} [\,a\,;\,b\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right] \end{array} \right.$$

C'est la différence entre la fonction et la corde entre a et b. Cette fonction est continue sur $[\,a\,;\,b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. De plus $g(a)=g(b)=0$. Il existe donc un point c de $]\,a\,;\,b\,[$ tel que $g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, d'où le résultat. □

Théorème 3.5 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x\in\,]\,a\,;\,b\,[,\qquad m\leqslant f'(x)\leqslant M$$

alors $$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$$

Dém. D'après le théorème précédent, il existe c dans $]\,a\,;\,b\,[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Comme $$m\leqslant f'(c)\leqslant M$$

On a $$m\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant M$$

et $$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)\qquad\text{car } b-a>0.$$

□

La propriété reste bien sûr vraie avec des inégalités strictes. Notez l'importance de l'hypothèse $a<b$.

Corollaire 3.6 — *Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I.*

Dém. Dans le théorème précédent, on a $m = M = 0$, donc $f(b) - f(a) = 0$ quelque soit a et b. □

Remarque I.0 La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et de dérivée nulle sur cet ensemble. Pourtant elle n'est pas constante... Le corollaire précédent est-il mis en défaut ? Non, car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle !

Corollaire 3.7 — *Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Dém. Dans le théorème précédent $m = 0$. Ainsi $f(b) - f(a) > 0$ si $a > b$. Ainsi f est croissante. □

Corollaire 3.8 — *Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).*

Théorème 3.9 — **Inégalité des accroissements finis – II**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\, a\,;\, b\,]$ et dérivable sur $]\, a\,;\, b\,[$. Si il existe un réel M tel que

alors $\forall x \in \,]\, a\,;\, b\,[, \qquad \left|f'(x)\right| \leqslant M \; |f(b) - f(a)| \qquad \leqslant M\,|b - a|$

IV — Résumé : plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

En pratique Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.** En décomposant f à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**

On utilise les propriétés de f :

- *périodicité de f* : si f est T-périodique (*i.e.* périodique de période T), on limite $\mathscr{D}_f$ à un intervalle de longueur T (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de f par translation.
- *parité de f* : si f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. On en déduira les propriétés de f sur l'ensemble $\mathscr{D}_f$ par symétrie.

3. **Étude de la continuité de f et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude**
   Éventuellement, prolongement par continuité de f aux points où f n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge f par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).
4. **Étude de la dérivabilité de f**
   Aux points x_0 où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si f est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
   Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi–tangentes.
5. **Étude de la monotonie de f**
   Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.
6. **Établissement du tableau de variation**
   On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).
7. **Étude des branches infinies de $\mathscr{C}_f$.**
8. **Représentation graphique de $\mathscr{C}_f$**
   On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de f.

V — Complément : Formules de Taylor

Je voudrais clore ce chapitre sur une démonstration de la formule de Taylor-Young, que nous avons utilisé au chapitre sur les développements limités. Cette formule est hors programme !

Théorème 5.1 — Formule de Taylor–Lagrange

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^{n+1}. Pour tout réels distincts a et b dans I, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ n'existe pas} \longrightarrow \text{on ne dit rien}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ (limite finie)} \longrightarrow \text{asymptote } y = b$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ n'existe pas} \longrightarrow \text{on ne dit rien} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \longrightarrow \text{branche parabolique de direction } Oy \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \longrightarrow \text{branche parabolique de direction } Ox \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^* \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) \text{ n'existe pas} \longrightarrow \text{direction asymptotique de coefficient directeur } a \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = \pm\infty \longrightarrow \text{branche parabolique de coefficient directeur } a \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b \longrightarrow \text{asymptote } y = ax + b \end{cases} \end{cases}$$

FIGURE I.4 — *Plan d'étude des branches infinies*

Dém. Posons la fonction annexe

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

définie sur $[a\ ;\ b]$, continue et dérivable sur cet intervalle.

La constante réelle A est choisit telle que $\varphi(a) = 0$. Ainsi

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

On constate alors que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le thm de Rolle, φ' s'annule donc en un point c sur $]a\ ;\ b[$. Or, pour t dans $[a\ ;\ b]$,

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A$$

$$= \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A$$

Donc en fait $A = -f^{(n+1)}(c)$. □

Théorème 5.2 — Formule de Taylor–Young

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^{n+1}. Pour tout a et x dans I, il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Dém. C'est une conséquence directe de la formule de Taylor–Lagrange : comme f est de classe C^{n+1}, la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a\,;\,b]$, etc. □