

Fonctions dérivables

BCPST I — 24 octobre 2017

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de \mathbb{R} et non réduit à un point, x_0 est un point de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

I.1 — Définition

Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$.
Alors $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur de la corde $[MM_0]$ de \mathcal{C}_f .

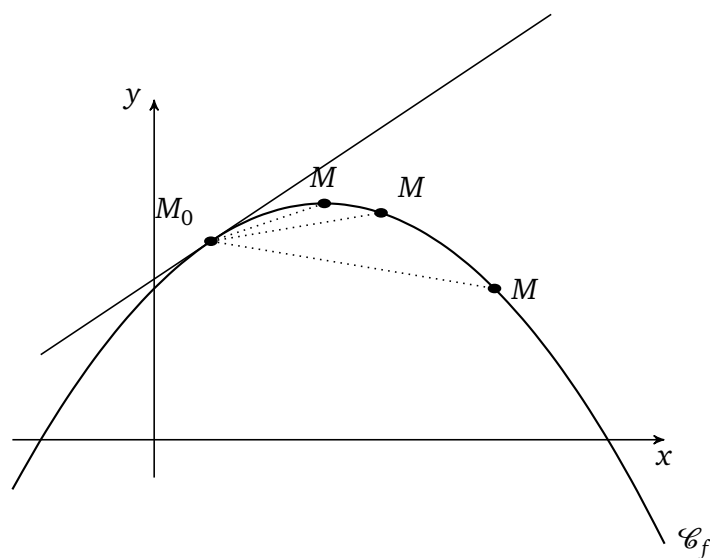


FIGURE I.1 — Corde, tangente et dérivabilité

Faisons alors tendre x vers x_0 . La corde peut admettre une position limite lorsque M se rapproche de M_0 . Cette position limite s'appelle la **tangente** de la courbe \mathcal{C}_f .

Si cette position limite n'est pas verticale, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} m \in \mathbb{R}$$

où m est la pente de la tangente en x_0 à \mathcal{C}_f .

En notant $f'(x_0)$ cette limite, l'équation de la tangente en x_0 s'écrit

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0 .

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{sous réserve d'existence})$$

On peut aussi noter $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x_0}$. La notation df désignait autrefois un accroissement infinitésimal de la « variable » f . On voit bien, sur cette notation, l'idée de coefficient directeur au sens « infinitésimal » du terme.

Notez l'importance de l'hypothèse « I non réduit à un point » : il faut pouvoir prendre au moins deux points de l'intervalle pour que les notions de corde et de tangente aient un sens.

Théorème 1.2 — Tangente en un point de \mathcal{C}_f

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale au point $(x_0, f(x_0))$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en x_0 .

Dém. □

Exemple

- Une fonction constante $x \mapsto a$ est dérivable en tout point : sa dérivée est nulle (réciproque à venir!)

- la fonction $x \mapsto x^n$ en un point x_0 quelconque, par le binôme de Newton

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} &= \frac{1}{h} \left(x_0^n + nhx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} - x_0^n \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

- la fonction $x \mapsto 1/x$ en tout point non nul x_0 :

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{-h}{hx_0(x_0 + h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x_0^2}$$

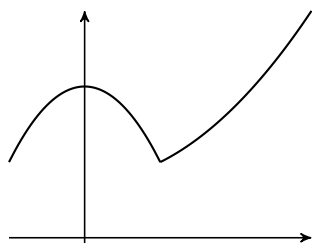
- la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en tout point x_0 de \mathbb{R}_+^* , par la méthode de la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{h} (\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) = \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

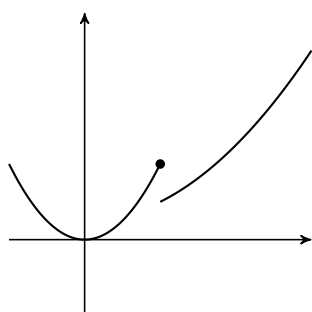
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.
– la fonction cos, mais ce n'est pas démontrable sans définition propre du cos.



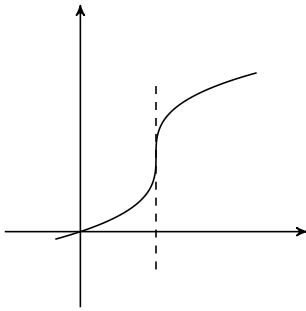
En pratique Qu'est-ce qu'une fonction non dérivable en un point ? La question est vaste, mais on peut imaginer quelques cas simples.



La fonction présente un brusque changement de direction, un « rebond ». Le taux d'accroissement a une limite différente à gauche et à droite.



La fonction présente une déchirure. Le taux d'accroissement a une limite infinie à droite (mais finie à gauche).



La tangente est verticale en un point. Le taux d'accroissement admet des limites infinies à gauche et à droite.

I.2 — Dérivation et continuité

Le second exemple ci-dessus permet de comprendre que la continuité est une condition nécessaire de dérivabilité.

Théorème 1.4 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Dém. En effet, on peut écrire, sur un voisinage de x_0 ,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f est dérivable en x_0 , en faisant tendre x vers x_0 le terme le plus à droite va tendre vers $0 \times f'(x_0)$, c'est-à-dire 0. Ainsi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, ce qui établit la continuité de f . \square

Intrinsèquement, on a utilisé le développement limité d'ordre 1 de f en x_0 .

La réciproque est fautive. La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Corollaire 1.5 — Si une fonction f est dérivable sur un domaine \mathcal{D} alors elle est continue sur \mathcal{D} .

I.3 — Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 1.6 — Dérivabilité à gauche, à droite.

On dit que f est *dérivable à gauche* en x_0 (resp. *à droite* en x_0) si et seulement si la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).

Propriété 1.7 — La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Graphiquement, si les dérivées à gauche et à droite sont différentes, cela signifie que \mathcal{C}_f « fait un angle » en x_0 .

Exemple La fonction $f : x \mapsto |x|$.

II — Fonction dérivée

II.1 — Définition

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est *dérivable sur I* .

La fonction f' définie par $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$ est la *fonction dérivée* de f .

Exemple Les fonctions usuelles : voir tout bon formulaire.

Dérivées successives

- Si f est dérivable sur I et que f' est également dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I , et la dérivée de f' se note f'' ou $f^{(2)}$. C'est la *dérivée seconde* de f sur I .
- On définit ainsi de proche en proche les dérivées d'ordre 3, 4, etc. de f . La *fonction dérivée d'ordre n* de f se note $f^{(n)}$. Par exemple : $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc.

Définition 2.3 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est *de classe C^n sur I* si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n -ième de f est continue sur I . L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est *de classe C^∞ sur I* si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n . L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Exemple

- Les fonctions polynômiales, la fonction exponentielle, les fonctions sin et cos sont réputées $C^\infty(\mathbb{R})$.

- Il est facile d'exhiber une fonction qui n'est pas $C^1(\mathbb{R})$ en prenant une fonction qui n'est pas dérivable, comme par exemple $x \mapsto |x|$.
- En revanche il est moins évident de trouver une fonction dérivable sur \mathbb{R} mais dont la dérivée n'est pas continue. En voici une

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous l'étudierons un peu plus loin.

II.2 — Opérations algébriques

Propriété 2.5 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est dérivable sur I , de fonction dérivée $\lambda f'$;
- 2) la fonction $f + g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f' + g'$;
- 3) la fonction $f \times g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.

Dém. Les deux premiers découlent des propriétés sur la limite. La troisième se démontre facilement

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= g(x_0+h) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

en utilisant la continuité de g en x_0 . □

Corollaire 2.6 — L'ensemble des fonctions dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de I dans \mathbb{R} .

Propriété 2.7 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;

2) la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;

3) la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞ .

Corollaire 2.8 — L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions de I dans \mathbb{R} . Idem pour les fonction $C^\infty(I)$.

Notez qu'il n'y pas de formule à notre disposition pour la dérivée d'ordre quelconque de $f \times g$...

II.3 — Composition

Propriété 2.9 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Dém. Démontrons ce résultat avec l'hypothèse supplémentaire que $f(x) - f(x_0)$ est non nulle sur un voisinage de x_0 privé de x_0 . Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Le second terme tend vers $f'(x_0)$. Quand au premier, par le théorème de composée des limites, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ par continuité de f en x_0 , donc ce terme tend vers $g'(f(x_0))$. \square

Exemple

– Si f est dérivable et ne s'annule pas sur I , alors $1/f$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $-f'/f^2$.

On obtient ce résultat en composant f à gauche par la fonction $x \mapsto 1/x$.

– Si f est dérivable et ne s'annule pas sur I , alors $\ln|f|$ est dérivable sur I et $(\ln|f|)' = f'/f$ (dém.).

– Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est dérivable sur I , alors f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$

– Le résultat précédent est vrai avec $\alpha \in \mathbb{R}$, f dérivable et strictement positive sur I : f^α est dérivable sur I et $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$ (à faire à la maison).

Propriété 2.11 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

Si la fonction f/g est définie sur I , alors f/g est dérivable sur I , de fonction dérivée $\frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Dém. À partir des résultats précédents, en utilisant la fonction $1/f$ et la formule du produit des dérivées. \square



En pratique Tous les théorèmes que l'on vient de voir permettent de prouver qu'une fonction est dérivable et de calculer en même temps sa dérivée. Revenons par exemple à la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \quad x \longmapsto \sin(x) \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = a(x) \times b(c(x))$$

Comme les trois fonctions a , b et c sont dérivables sur \mathbb{R}_+ , il en est de même de la fonction f . Par les règles de calcul usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = a'(x)b(c(x)) + a(x)c'(x)b'(c(x)) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

En 0 les théorèmes précédents n'apportent pas d'information. Mais cela ne veut pas dire qu'on ne peut rien dire. Revenons à la définition de la dérivabilité pour étudier le point 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

en reconnaissant le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Toutefois f' n'a pas de limite en 0. Comme f' n'est pas continue en 0, on vient d'établir que f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R} .

II.4 — Dérivée de la bijection réciproque

Théorème 2.12 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f(I)$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Dém. Le taux d'accroissement en $(y_0, f^{-1}(y_0))$ s'écrit

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y}$$

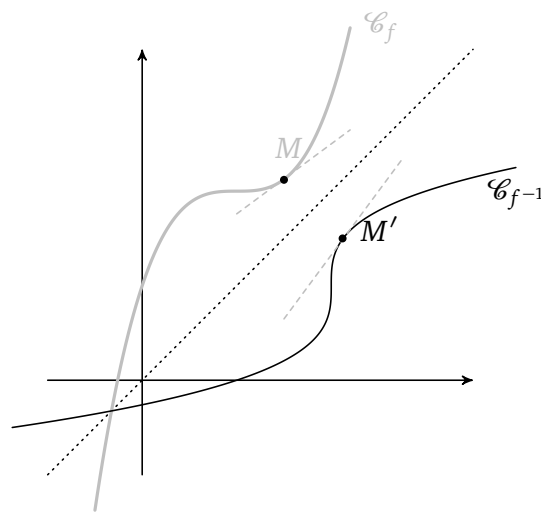
avec $y \in f(I)$, et $y \neq y_0$. Faisons alors le changement de variable $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Le taux d'accroissement devient

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}$$

Remarquer que cette expression est bien définie au voisinage de x_0 (privé de x_0), par injectivité de f .

On sait que f est continue sur I et donc que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Donc $x \xrightarrow{y \rightarrow y_0} x_0$. Ainsi le taux d'accroissement précédent tend vers $1/f'(x_0)$ si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas f^{-1} est donc dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \square$$



Remarquez que si $f'(x_0) = 0$, comme f est monotone sur I , le taux d'accroissement de f est de signe constant. Ainsi il tend vers $0+$ ou vers $0-$, et donc

$$\frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm \infty$$

La tangente $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est verticale dans ce cas.

Exemple

- Arcsin, Arctan, Arccos ont été vues dans le chapitre sur les fonctions usuelles ;
- À titre d'exemple, considérons la fonction $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la bijection réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la bijection

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} y \mapsto y^3 \end{array} \right.$$

Comme f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , f^{-1} l'est aussi.

La dérivée de f est $f'(y) = 3y^2$. Elle s'annule uniquement en 0. Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}^*$. Dans ce cas

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

III — Théorème de Rolle & conséquences

Nous voyons dans cette partie les théorèmes essentiels qui relient les propriétés d'une fonction aux propriétés de sa dérivée.

III.1 — Extremum local d'une fonction

Définition 3.1 — Extrema locaux

On dit que f admet un *maximum local* (resp. un *minimum local*) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \\ \text{(resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

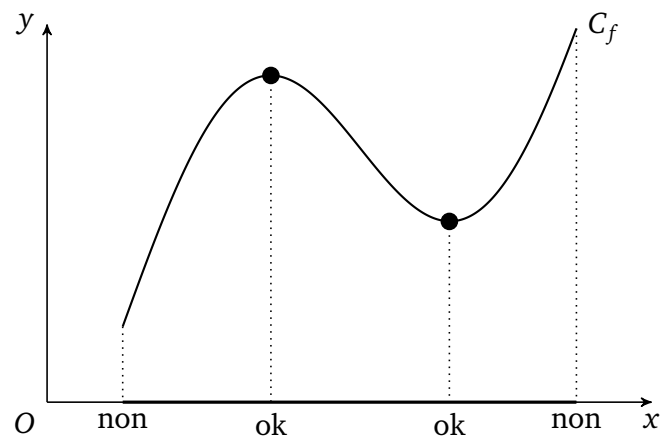


FIGURE I.2 — *Extrema locaux*

On notera que le maximum *global* de f sur I est à chercher à l'intérieur de I et aussi aux bornes.

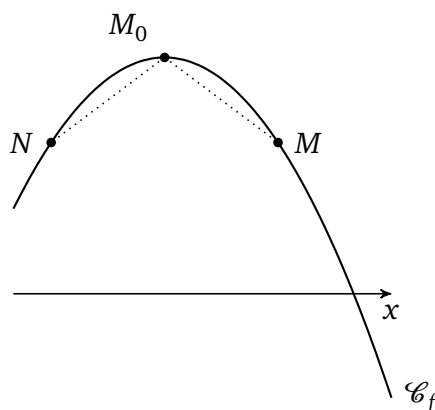


FIGURE I.3 — Démonstration du théorème de Rolle

Théorème 3.2 — Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire pas une borne de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Dém. En cas de maximum, la limite du taux d'accroissement est à la fois positive (en considérant sa limite à droite) et négative (en considérant sa limite à gauche) : elle est donc nulle. □

Attention ! On prendra garde à ce que

1. Ce théorème ne concerne que les points intérieurs de I . Par exemple, la fonction $f : \begin{cases} [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{cases}$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée ne s'annule pas en 1.
2. Ce théorème ne concerne que les extremums où f est dérivable. Par exemple $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ admet un extremum local en 0 sans y être dérivable.
3. Enfin ce théorème n'admet pas de réciproque. Par exemple $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local de f .

Pour résumer, on cherchera les extremums d'une fonction à l'aide du tableau de variations...

III.2 — Théorème de Rolle

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dém. Comme f est continue sur le segment $[a ; b]$ elle est bornée et atteint ses bornes.

Si elle atteint son maximum ou son minimum en un point $c \in]a ; b[$ alors ce point est un extremum local. D'après le théorème précédent, $f'(x) = 0$.

Sinon elle atteint son maximum et son minimum sur $\{a, b\}$. Comme $f(a) = f(b)$, minimum et maximum sont confondus : f est donc constante et sa dérivée est nulle sur $[a ; b]$, d'où le résultat. \square

Attention ! L'hypothèse « I est un intervalle » est essentielle. Elle est implicite dans le fait que f est continue sur le segment $[a ; b]$. On verra des conséquences de ce point ci-dessous.

III.3 — Formule des accroissements finis

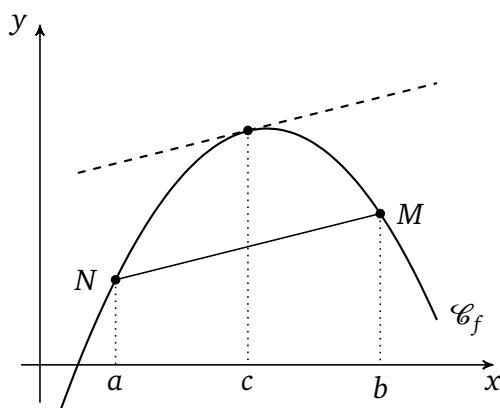
Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Il existe $c \in]a ; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dém. Ce théorème important a une interprétation géométrique simple : la corde entre deux points et parallèle à une tangente à la courbe prise entre ces deux points.



Ce qui peut nous donner l'idée de la démonstration. Utilisons la fonction annexe

$$g : \begin{cases} [a; b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right] \end{cases}$$

C'est la différence entre la fonction et la corde entre a et b . Cette fonction est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. De plus $g(a) = g(b) = 0$. Il existe donc un point c de $]a; b[$ tel que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, d'où le résultat. \square

Corollaire 3.5 — Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I .

Dém. Dans le théorème précédent, on a $m = M = 0$, donc $f(b) - f(a) = 0$ quelque soit a et b . \square

Remarque I.1 La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et de dérivée nulle sur cet ensemble. Pourtant elle n'est pas constante... Le corollaire précédent est-il mis en défaut? Non, car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle!

Corollaire 3.6 — Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Dém. Dans le théorème précédent $m = 0$. Ainsi $f(b) - f(a) > 0$ si $a > b$. Ainsi f est croissante. \square

Corollaire 3.7 — Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Théorème 3.8 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a ; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Dém. D'après le théorème précédent, il existe c dans $]a ; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Comme
$$m \leq f'(c) \leq M$$

On a
$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

et
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \quad \text{car } b - a > 0.$$

□

La propriété reste bien sûr vraie avec des inégalités strictes. Notez l'importance de l'hypothèse $a < b$.

Théorème 3.9 — Inégalité des accroissements finis - II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe un réel M tel que

alors
$$\forall x \in]a ; b[, \quad |f'(x)| \leq M |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

IV — Résumé : plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.



En pratique Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition** \mathcal{D}_f . En décomposant f à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**

On utilise les propriétés de f :

- *périodicité de f* : si f est T -périodique (i.e. périodique de période T), on limite \mathcal{D}_f à un intervalle de longueur T (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de f par translation.
- *parité de f* : si f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. On en déduira les propriétés de f sur l'ensemble \mathcal{D}_f par symétrie.

3. Étude de la continuité de f et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude

Éventuellement, prolongement par continuité de f aux points où f n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge f par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).

4. Étude de la dérivabilité de f

Aux points x_0 où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si f est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi-tangentes.

5. Étude de la monotonie de f

Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.

6. Établissement du tableau de variation

On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).

7. Étude des branches infinies de \mathcal{C}_f .

8. Représentation graphique de \mathcal{C}_f

On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de f .

V — Complément : Formules de Taylor

Je voudrais clore ce chapitre sur une démonstration de la formule de Taylor-Young, que nous avons utilisé au chapitre sur les développements limités. Cette formule est hors programme !

Théorème 5.1 — Formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , de classe C^{n+1} . Pour tout réels distincts a et b dans I , il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

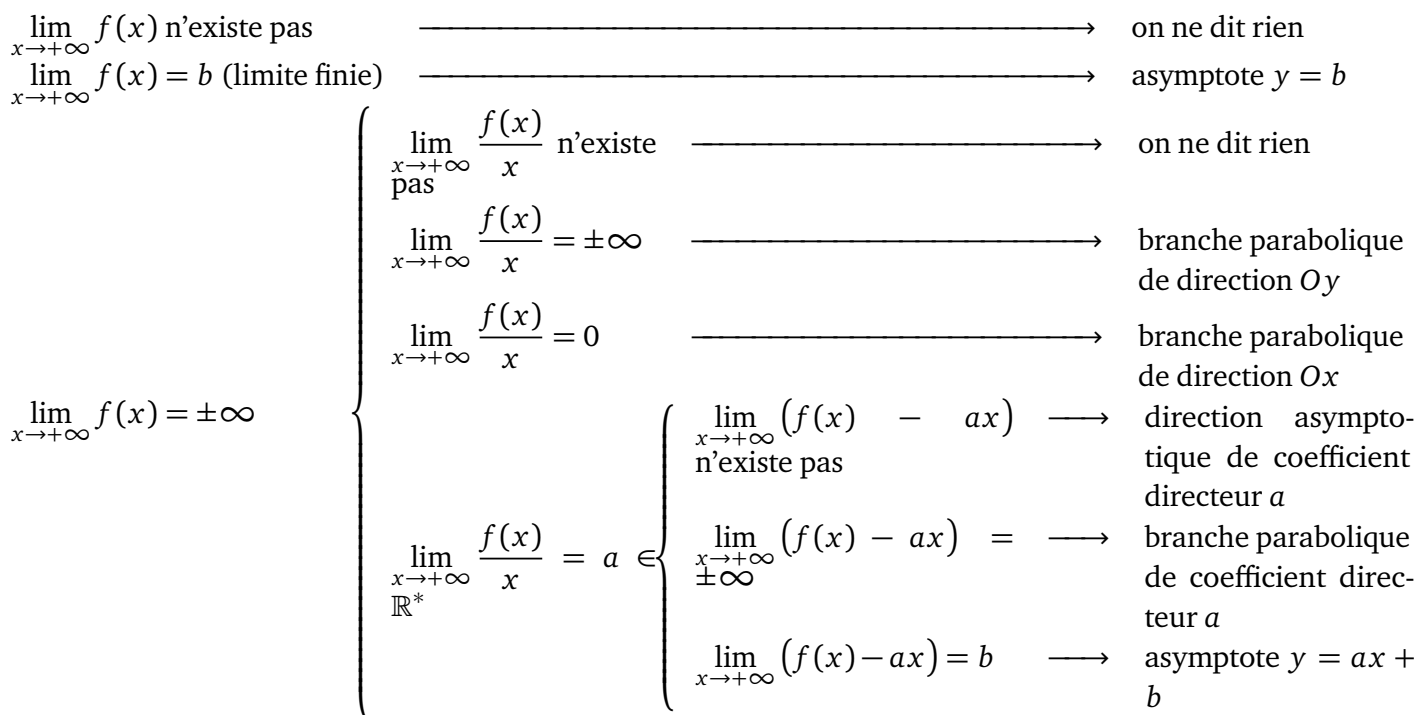


FIGURE I.4 — Plan d'étude des branches infinies

Dém. Posons la fonction annexe

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

définie sur $[a ; b]$, continue et dérivable sur cet intervalle.

La constante réelle A est choisit telle que $\varphi(a) = 0$. Ainsi

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

On constate alors que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le thm de Rolle, φ' s'annule donc en un point c sur $]a ; b[$. Or, pour t dans $[a ; b]$,

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A \\
 &= \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} A
 \end{aligned}$$

Donc en fait $A = -f^{(n+1)}(c)$. □

Théorème 5.2 — Formule de Taylor–Young

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , de classe C^{n+1} . Pour tout a et x dans I , il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Dém. C'est une conséquence directe de la formule de Taylor–Lagrange : comme f est de classe C^{n+1} , la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a ; b]$, etc. □