Dénombrement

BCPST 1, 26/09/2018

I — Ensemble fini et cardinal

I.1 — Cardinal d'un ensemble

Définition 1.1 — Ensemble fini, cardinal
On dit qu'un ensemble E est un ensemble fini si et seulement si E est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de E dans $[\![1 \,;\, n]\!]$.
Dans ce dernier cas l'entier n est unique : c'est le cardinal de E, noté $\operatorname{card} E$.
Par convention $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Une telle bijection s'appelle une énumération de E. C'est *une* façon de compter les éléments de E.
L'entier $\operatorname{card} E$ représente le nombre d'éléments de E.
Le théorème suivant, très simple à comprendre, n'est pas du tout évident à démontrer.

Théorème 1.2 — Sous-ensemble d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors A est un ensemble fini.

Nous allons nous baser sur sa version « entiers naturels » :

Lemme 1.3 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A un sous-ensemble de $[\![1 \,;\, n]\!]$. L'ensemble A est fini et* $\operatorname{card} A \leqslant n$.

Dém. Démontrons ce résultat par récurrence.
Pour $n = 1$: les deux seuls sous-ensembles de $\{1\}$ sont $\varnothing$ et $\{1\}$. On voit que le résultat est vrai dans ce cas.
Au rang n. Supposons donc le résultat vrai pour un entier n. Soit A un sous-ensemble de $[\![1 \,;\, n+1]\!]$.
L'ensemble $A \setminus \{n+1\}$ est inclus dans $[\![1 \,;\, n]\!]$, on lui applique l'hypothèse de récurrence : $A \setminus \{n+1\}$ est fini et $\operatorname{card}(A \setminus \{n+1\}) \leqslant n$.
Par application du théorème 1.4, l'ensemble A, qui est union disjointe de $A \setminus \{n+1\}$ et de $\{n+1\}$ est fini. □

Démonstration du théorème **??** Si E est vide, le résultat est évident.
Sinon, soit $n = \operatorname{card} E$ et α une bijection de E dans $[\![1 \,;\, n]\!]$. D'après le lemme $\alpha\langle A\rangle$ est un ensemble fini, et $\operatorname{card}(\alpha\langle A\rangle) \leqslant n$. Comme A et $\alpha\langle A\rangle$ sont en bijection, on en tire que A est fini et que $\operatorname{card} A \leqslant n$.

Voici le théorème le plus utile du cours.

Théorème 1.4 — Union disjointe (1)
Soit E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F$$

DÉM. Si E ou F est vide le résultat est évident.
Supposons E et F non vides. Il existe alors une bijection ψ de E dans $[\![1 \,;\, \operatorname{card} E]\!]$ et une bijection φ de F dans $[\![1 \,;\, \operatorname{card} F]\!]$. L'application

$$f \;:\; \left| \begin{array}{rcl} E \cup F & \longrightarrow & [\![1 \,;\, \operatorname{card} F + \operatorname{card} E]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \psi(x) & \text{si} \quad x \in E \\ \varphi(x) + \operatorname{card} E & \text{si} \quad x \in F \end{cases} \end{array} \right.$$

est une bijection de $E \cup F$ dans $[\![1 \,;\, \operatorname{card} E + \operatorname{card} F]\!]$, de bijection réciproque

$$g \;:\; \left| \begin{array}{rcl} [\![1 \,;\, \operatorname{card} F + \operatorname{card} E]\!] & \longrightarrow & E \cup F \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \psi^{-1}(k) & \text{si} \quad k \in [\![1 \,;\, \operatorname{card} E]\!] \\ \varphi^{-1}(k) - \operatorname{card} E & \text{si} \quad k \in [\![\operatorname{card} E + 1 \,;\, \operatorname{card} F]\!] \end{cases} \end{array} \right.$$

On prouve que f et g sont bien définies en utilisant la disjonction de E et F. □

Théorème 1.5 — Union disjointe (2)
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_r$ r ensembles finis deux à deux disjoints. Alors

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

DÉM. Par récurrence sur r. □

Corollaire 1.6 — Complémentaire d'un ensemble
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.

$$\operatorname{card} \overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A \tag{I.1}$$

DÉM. En découpant E en deux sous-ensembles disjoints A et $\overline{A}$. □

Corollaire 1.7 — *Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.*

- $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$;

- $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E$ *si et seulement si* $A = E$.

Propriété 1.8 — *Soit A, B et C trois ensembles finis.*

1) $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$;

2) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$;

3) $\operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cup B)$;

DÉM. En découpant à chaque fois en sous-ensembles disjoints. □

Corollaire 1.9 — *Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Alors*

$$\operatorname{card} E = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

Exemple A Combien y a-t'il de carrés dessinés sur la figure A ?

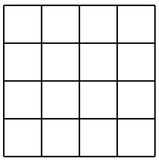

FIGURE I.1 — *Combien de carrés ?*

On peut utiliser la partition formé de A_1, A_2, A_3 et A_4, où A_i est l'ensemble de carrés de côté i unités.

Corollaire 1.10 — Principe de symétrie ou « des bergers »

Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Si $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2 = \dots = \operatorname{card} A_r = p$ *alors* $\operatorname{card} E = r \times p$.

Ce corollaire donne une méthode de comptage simple, comme nous le verrons un peu plus tard.

II — Dénombrement

Dénombrer signifie calculer le cardinal d'un ensemble.

II.1 — Principe de construction.

La plupart du temps on dénombrera une situation en lui associant bijectivement soit un mot (une suite de symboles, un p–uplets,...) soit un sous-ensemble d'un ensemble de symboles.
Par exemple, pour les mots :

Exemple B

- Un nombre entre 0 et 999 peut être considéré comme un mot de 3 lettres choisis dans $[\![0 ; 9]\!]$.
- Plaçons trois boules marquées A, B et C dans trois urnes.

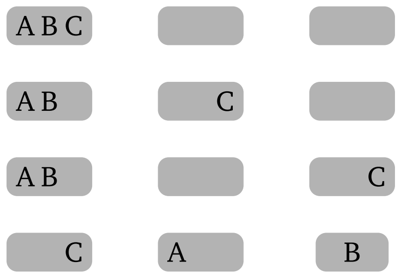

Figure I.2 — *Trois boules dans trois urnes, quelques situations possibles.*

  Une façon de rendre compte de cette situation est de lui associer un mot de 3 lettres. La première lettre est choisie dans $(1, 2, 3)$ et représente l'urne dans laquelle est placée la boule A. La seconde lettre est choisie dans $(1, 2, 3)$ et représente l'urne dans laquelle est placée la boule B. La troisième lettre symbolise l'urne de la boule C.
  Les situations de la figure sont alors codées par $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, etc.
- un code d'immeuble est constitué de 4 chiffres suivis d'une lettre à choisir entre A et B. Il s'agit d'un mot dont les trois premières lettres sont dans l'ensemble $[\![0 ; 9]\!]$ et dont la dernière est dans $\{A, B\}$.
- Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire 10 boules de l'urne une à une, successivement et avec remise.
  On associe à chaque résultat de l'expérience un mot de 10 lettres choisies dans $\{a, b\}$.
- on lance n fois de suite un dé à 6 faces : on associe à chaque résultat de l'expérience un mot de n lettres choisies dans $[\![1 ; 6]\!]$.
- On considère n personnes qui lance chacune au hasard un dé à 6 faces...

Ces mots peuvent également être définis avec une contrainte supplémentaire.

Exemple C

- Un nombre entre 100 et 199 peut être considéré comme un mot de 3 lettres choisis dans $[\![0 ; 9]\!]$ avec la contrainte « la première lettre est 1 ». Mais il est plus simple de dire « il y a autant de mot de cette sorte que de mots de *deux* lettres choisies dans $[\![0 ; 9]\!]$.
- Soit 10 personnes notées A_1, A_2, etc. Chacune offre un cadeau à une autre personne, sans que personne ne reçoive deux cadeaux. Ici, on peut utiliser des mots de 10 lettres. La première lettre représente la personne à qui A_1 a donné son cadeau, la seconde la personne à qui A_2 a donné son cadeau etc.
  La contrainte sur les mots est : « chaque lettre est présente exactement une seule fois ». Ou encore « il n'y a pas de répétitions sur les lettres ».
- Dans une urne contenant 5 boules « a » et 5 boules « b », on tire 8 boules successivement et sans remise. La contrainte ici est « les mots ne contiennent pas plus de 5 « a » et pas plus de 5 « b ».

Pour les sous-ensembles :

Exemple D

- on tire 5 cartes d'un jeu de 54 cartes.
- une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de p boules.

Voici trois outils utiles pour compter ses situations.

II.2 — p–uplets

Théorème 2.1 — Cardinal du produit cartésien (1)
Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \times \operatorname{card} B$$

Dém. En utilisant la bijection de $[\![0 ; n-1]\!] \times [\![0 ; m-1]\!]$ dans $[\![0 ; n*m-1]\!]$ définie par

$$f \;:\; \left| \begin{array}{rcl} [\![0 ; n-1]\!] \times [\![0 ; m-1]\!] & \longrightarrow & [\![0 ; n*m-1]\!] \\ (q,r) & \longmapsto & m*q+r \end{array} \right.$$

Pour prouver que f est bijective, on utilise la division euclidienne d'entiers. □

Théorème 2.2 — Cardinal du produit cartésien (2)
Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$ p ensembles finis de cardinaux respectifs n_1, n_2, ..., n_p.
L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini, de cardinal $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Dém. À l'aide du théorème précédent, par récurrence en utilisant la bijection naturelle de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans $E_1 \times (E_2 \times \cdots \times E_p)$. □

Corollaire 2.3 — *En particulier* $\operatorname{card}(E^p) = (\operatorname{card} E)^p$.

On parle de p–listes d'éléments de E ou encore de p–uplets d'éléments de E.
Ces théorèmes formalisent les raisonnements « avec choix successifs » : E_1 est l'ensemble des choix possibles pour la première lettre, E_2 pour la seconde, etc.
On peut aussi considérer que chaque indice i du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ représente une place d'un tirage effectué dans l'ensemble E_i.

II.3 — Arrangements

Un arrangemenent d'éléments de E est un p-uplet sans répétition.

Définition 2.4 — Arrangements
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle arrangement de p élément de E un p–uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2, \qquad i \neq j \Longleftrightarrow x_i \neq x_j$$

Soit $\mathscr{A}_p(E)$ l'ensemble des arrangements de p éléments de E. C'est un sous-ensemble de E^p. Comme E^p est fini, $\mathscr{A}_p(E)$ est également fini. Le théorème suivant nous donne son cardinal.

Théorème 2.5 — Nombre d'arrangements
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p.

1) *Si $p \leqslant n$, il y a*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de cette sorte ;

2) *si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.*

Dém. Démontrons ce résultat par récurrence sur n.

Au rang $n = 1$. Pour $p = 1$ il n'y a qu'un seul arrangement possible. La formule donne bien 1.

Au rang n. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$. Notons $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. On utilise la partition de $\mathscr{A}_p(E)$ avec les ensembles $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$

$$B_i = \left\{ l \in \mathscr{A}_p(E) \qquad \text{et} \qquad l \text{ commence par } x_i \right\}$$

Chacun de ces ensembles est en bijection avec $\mathscr{A}_{p-1}(E)$ et il y en a $n+1$. D'après le principe des bergers : cela fait $(n+1)\times[n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)]$ arrangements, d'où le résultat. □

Définition 2.6 — Permutations
On appelle permutations d'un ensemble E à n éléments les arrangements de n éléments de E. Il y en a $n!$.

II.4 — Combinaisons

Définition 2.7 — Combinaisons
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle combinaison de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.

Soit $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de p éléments de E. C'est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$.

Théorème 2.8 — Nombre de combinaisons
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

Dém. Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser le principe des bergers, ou principe de symétrie.
Soit une combinaison $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ d'éléments de E à p éléments. Il y a $p!$ arrangements que l'on peut écrire avec cette combinaison.
On partitionne alors $\mathscr{A}_p(E)$ avec les sous-ensembles (B_c) où c parcourt l'ensemble des combinaisons et B_c est l'ensemble des arrangements que l'on peut écrire avec c. Le principe des bergers amène alors directement $p!c_{n,p}$. □

On peut retrouver par le dénombrement la plupart des formules usuelles sur les coefficients binomiaux.

Application 1 — Nombre de parties d'un ensemble à n éléments
Il y en a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

II.5 — Quelques exemples de dénombrement

II.5.1 — Par dénombrement direct
On dispose d'un urne contenant n objets distincts (ce qui fait un ensemble E de cardinal n).
Nombre de manière de tirer successivement et avec remise p éléments. Un résultat possible est donc un p-uplet d'éléments de E : il y en a au total n^p.
Nombre de manière de tirer successivement et sans remise p éléments. Un résultat possible est donc un arrangement de p éléments de E : il y en a au total $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

II.5.2 — Par construction
On peut reprendre les exemples précédents en construisant étape par étape des mots.
Autre exemple : de combien de façon peut-on disposer $3n$ objets distincts dans 3 paniers distincts, à raison de n objets par paniers ?
On choisit d'abord n objets $\binom{3n}{n}$ que l'on place dans le premier panier, puis on fait de même avec les deux autres tiers.

II.5.3 — Par construction, cas symétrique
Et si les 3 paniers sont indiscernables ? Le raisonnement suivant ne tient pas, car le choix d'un premier panier est arbitraire.
Dans ce cas, on compte le cas en cassant la symétrie (donc en attribuant des numéros arbitraires). Puis on tient compte de la symétrie (en divisant donc par 3!, cf. ci-dessus).

II.5.4 — En plaçant des objets
Ici, ce ne sont plus les places que l'on considère les unes après les autres mais les objets.
Combien de mots peut-on écrire avec n lettres « A » et p lettres « B » ? On choisit d'abord la place des « A », puis celle des « B ».
Combien de mots peut-on écrire avec n lettres « A » et p lettres « B » commençant et se terminant par la même lettre ? On choisit d'abord la lettre (A ou B) puis on en place 2 (aux extrémités) puis les $n-2$ ou $p-2$ autres, puis le reste.

II.5.5 — En plaçant des objets, cas symétrique
cf. ci-dessus : on l'a déjà fait en fait !