Continuité sur un intervalle

BCPST 1 — 27 février 2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :*
- *I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduite à un point ;*
- *$\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$.*

I — Fonction continue sur un ensemble

Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue $\mathcal{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

À l'exception de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un domaine $\mathcal{D}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Théorème 1.3 — Composition

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $\mathcal{D}$, si $f\langle\mathcal{D}\rangle \subset \mathcal{D}'$ et si g est continue sur $\mathcal{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Exemple
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\alpha}$ est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$.

- Démontrer qu'une fonction donnée est continue grâce à ces théorèmes : rédaction complète.
  Exemple avec $f(x) = \ln(1-x^2)$, avec $f : \begin{array}{|rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1+x^2 \mathrm{x} \leqslant 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} \mathrm{x} > 0 \end{cases} \end{array}$
- Continuité de $f : \begin{array}{|rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} \end{array}$

Théorème 1.4 — Composition avec une suite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels à valeur dans $\mathscr{D}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathscr{D}$ alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.

Dém. En effet, par composée de limites la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de f en a. Mais comme a est supposé être dans $\mathscr{D}$, et que f est continue sur I, la limite de f en a n'est autre que $f(a)$. □

Ce théorème est utilisé dans l'étude de suite de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Exemple Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = \frac{6}{5+u_n}$$

Cette suite est-elle bien définie ?

Quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$$

est-elle convergente ? Que pouvez-vous dire de sa limite ?

II — Théorème des valeurs intermédiaires

Le résultat essentiel de cette partie est le théorème des valeurs intermédiaires. On en donne 3 énoncés, qui sont en fait des façons différentes de dire la même chose.

Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points distincts de I.

Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Dém. On peut supposer, quitte à les renommer, que $a \leqslant b$.

On va montrer que c existe en utilisant la méthode de la dichotomie. Définissons pour cela trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \mathrm{f}(c_n)f(a_n) \geqslant 0 & a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n \\ \text{sinon} & a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n \\ & c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

L'idée est que tous les points $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du « même côté » de c, de même pour les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la distance $b_n - a_n$ décroit (vite !).

Puisque I est un intervalle, ces suites sont à valeurs dans I. Elles sont donc correctement définies car la condition $f(a_n)f(c_n) \geqslant 0$ peut toujours être testée.

On va maintenant démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$,

- si $f(c_n)f(a_n) \geqslant 0$ alors, d'une part comme a_{n+1} est au milieu du segment,

$$a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$

  et d'autre part

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

- sinon on a $f(c_n)f(a_n) < 0$. D'une part comme b_{n+1} est au milieu du segment, on a toujours

$$a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$

  et de plus

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$
$$\text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1/2$, elle est de limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite c'.

Comme f est continue sur I, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c')$.

Or par construction

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$$

donc $f(c') = 0$. Le réel c' est donc le réel c cherché. □

Exemple

- si P est une fonction polynôme de degré impair, alors P admet une racine réelle.
- (pour traverser une rivière sans pont, il faut se mouiller !) si f et g sont deux fonctions définies sur $[\,0\,;\,1\,]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$ alors il existe un point x tel que $f(x) = g(x)$;
- si f va de $[0\,;\,1]$ dans $[0\,;\,1]$, alors f admet un point fixe.

Corollaire 2.2 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Dém. L'hypothèse s'écrit $(f(a)-\gamma)(f(b)-\gamma) < 0$. On applique alors le TVI à la fonction $f-\gamma$ qui est continue sur I : il existe c entre a et b tel que $f(c)-\gamma = 0$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Alors $f\langle I\rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dém. Prenons α et β dans $f\langle I\rangle$.

Il s'agit de démontrer que si γ est entre α et β alors γ est dans $f\langle I\rangle$.

Soit a et b deux points de I, avec $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. D'après le corollaire précédent, il existe c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$. Bien sûr $c \in I$, puisque I est un intervalle. Ainsi $\gamma = f(c) \in f\langle I\rangle$. □

Corollaire 2.4 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit a et b deux élements de I, éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors*

1) *Si f est croissante :*

- $f\langle]\,a\,;b\,[\rangle = \left]\lim\limits_{a+} f\ ;\ \lim\limits_{b-} f\right[$
- $f\langle [\,a\,;b\,[\rangle = \left[\,f(a)\,;\ \lim\limits_{b-} f\right[$
- $f\langle]\,a\,;b\,]\rangle = \left]\lim\limits_{a+} f\ ;f(b)\right]$
- $f\langle [\,a\,;b\,]\rangle = [\,f(a)\,;f(b)\,]$

2) Si f est décroissante :

- $f\langle]\,a\,;b\,[\rangle = \left]\lim\limits_{b-} f\ ;\ \lim\limits_{a+} f\right[$
- $f\langle [\,a\,;b\,[\rangle = \left[\,f(b)\,;\ \lim\limits_{a+} f\right[$
- $f\langle]\,a\,;b\,]\rangle = \left]\lim\limits_{b-} f\ ;f(a)\right]$
- $f\langle [\,a\,;b\,]\rangle = [\,f(b)\,;f(a)\,]$

En pratique on lit l'image d'un intervalle directement sur le tableau de variations.

Remarque I.0 Si f n'est pas monotone, $f\langle [a\,;b]\rangle$ est en général différent de $[f(a)\,;f(b)]$: par exemple avec $x \mapsto x(1-x)$.

Seul un tableau de variation bien construit permet de conclure.

Remarque I.0 Les intervalles I et $f\langle I\rangle$ ne sont pas nécessairement de même nature :

- avec tan sur $[\,0\,;\pi/2\,[$, l'un est borné, pas l'autre.
- avec sin sur $]\,0\,;\pi\,]$, l'un est semi-ouvert, pas l'autre.
- avec sin sur $]\,0\,;2\pi\,[$, l'un est ouvert, pas l'autre.

Cette remarque justifie l'intérêt du théorème

Théorème 2.5 — Théorème des bornes atteintes

Soit I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors $f\langle I\rangle$ est aussi un segment de $\mathbb{R}$.

Dém. Admis. Cette démonstration est inaccessible avec les moyens du programme.

□

Corollaire 2.6 — *Une fonction continue sur un segment est bornée est atteint ses bornes.*

Dém. En effet affirmer que $f\langle [\,a\,;b\,]\rangle = [\,m\,;M\,]$ c'est dire que f est bornée entre m et M et surtout qu'il existe $(c,d) \in [\,a\,;b\,]^2$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$. □

III — Théorème de la bijection continue

C'est un théorème important, à la fois en théorie et en pratique. Hélas il est trop souvent confondu avec le TVI.

Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone.

- *La fonction f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.*
- *La bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f\langle I\rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f*
- *Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\langle I\rangle$.*

Ce théorème, très important théoriquement, permet de définir une foultitude de fonctions et de s'assurer facilement de leur continuité (notez que la dérivabilité est un autre problème…).

Proposition 3.2 — *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.*

Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

On retrouve ainsi le graphe de nombreuses fonctions connues.

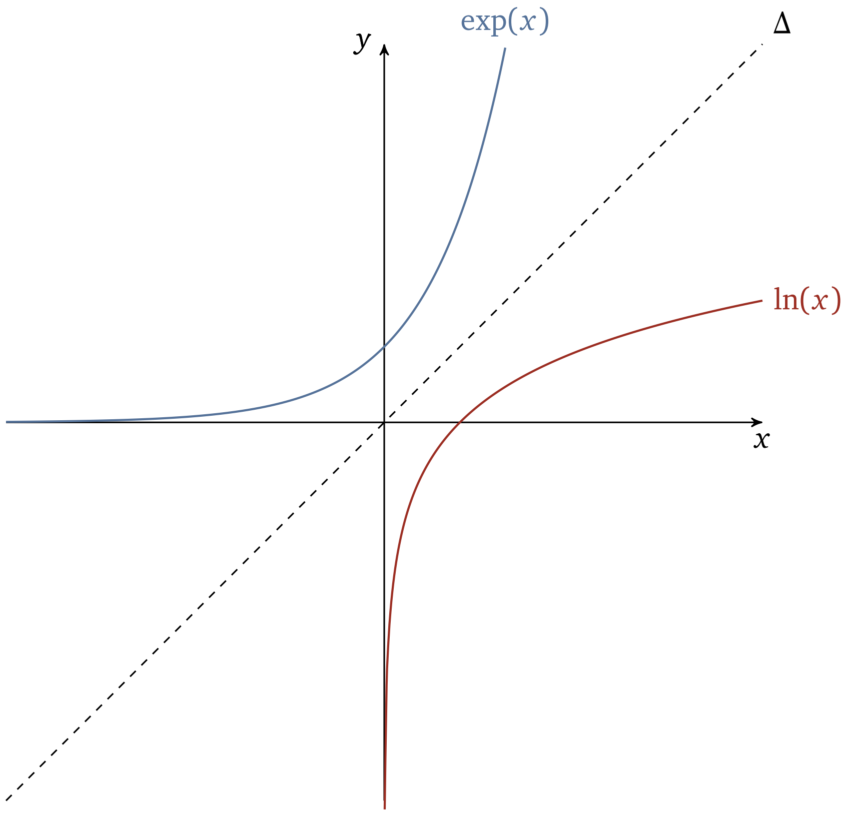

FIGURE I.1 — *Graphes de* ln *et de* exp.

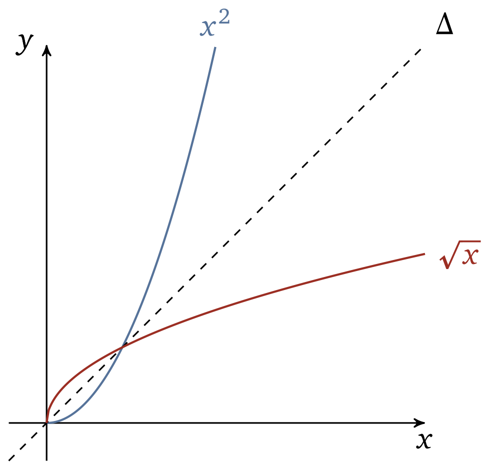

FIGURE I.2 — *Graphes de* $x \mapsto x^2$ *et de* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Application I.0 — Définition de la racine n-ième.
Voir le chapitre sur les fonctions usuelles.

Application I.0 — Définition de Arcsin, Arccos, Arctan.
Idem.

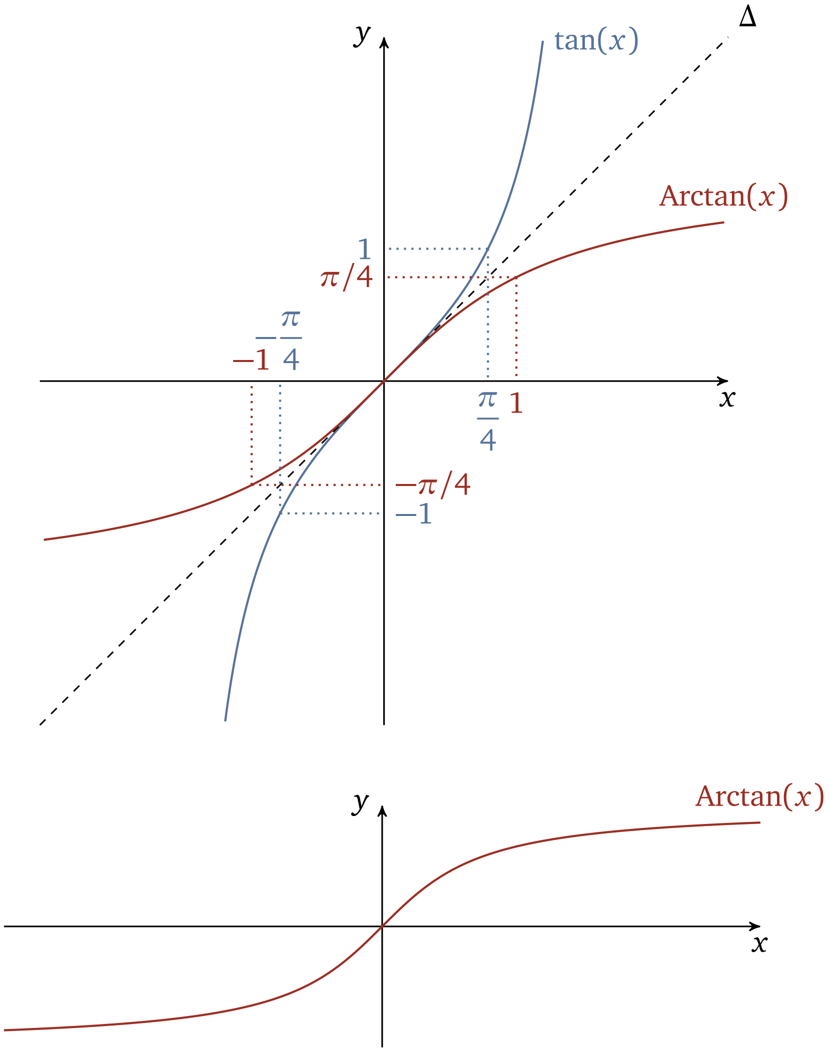

FIGURE I.3 — *Graphe de* Arctan

Corollaire 3.3 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, a et b deux points de I.

Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Dém. La nouveauté est dans l'affirmation de l'unicité. □