Continuité sur un intervalle

BCPST 1, 26/09/2018

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :*

- *I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduite à un point ;*
- *$\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$.*

I — Fonction continue sur un ensemble

Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue $\mathscr{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.

À l'exception de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un domaine $\mathscr{D}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathscr{D}$.

Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de $\mathscr{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1.3 — Composition

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $\mathscr{D}$, si $f\langle\mathscr{D}\rangle \subset \mathscr{D}'$ et si g est continue sur $\mathscr{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Exemple

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$.
- Démontrer qu'une fonction donnée est continue grâce à ces théorèmes : rédaction complète.

  Exemple avec $f(x) = \ln(1 - x^2)$, avec $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

– Continuité de $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array} \right.$

Théorème 1.5 — Composition avec une suite
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels à valeur dans $\mathscr{D}$, telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ avec $a \in \mathscr{D}$.
Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.

DÉM. En effet, par composée de limites la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de f en a. Mais comme a est supposé être dans $\mathscr{D}$, et que f est continue sur I, la limite de f en a n'est autre que $f(a)$. □

Ce théorème est utilisé dans l'étude de suite de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Exemple A Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = \frac{6}{5+u_n}$$

Cette suite est-elle bien définie ?
Quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

Exemple B La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$$

est-elle convergente ? Que pouvez-vous dire de sa limite ?

II — Théorème des valeurs intermédiaires

Le résultat essentiel de cette partie est le théorème des valeurs intermédiaires. On en donne 3 énoncés, qui sont en fait des façons différentes de dire la même chose.

Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points distincts de I.
Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

DÉM. On peut supposer, quitte à les renommer, que $a \leqslant b$.

On va montrer que c existe en utilisant la méthode de la dichotomie. Définissons pour cela trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{si } f(c_n)f(a_n) \geqslant 0 & a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n \\ \text{sinon} & a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n \\ & c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

L'idée est que tous les points $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du « même côté » de c, de même pour les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la distance $b_n - a_n$ décroit (vite !).
Puisque I est un intervalle, ces suites sont à valeurs dans I. Elles sont donc correctement définies car la condition $f(a_n)f(c_n) \geqslant 0$ peut toujours être testée.
On va maintenant démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

– si $f(c_n)f(a_n) \geqslant 0$ alors, d'une part comme a_{n+1} est au milieu du segment,

$$a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$

  et d'autre part

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

– sinon on a $f(c_n)f(a_n) < 0$. D'une part comme b_{n+1} est au milieu du segment, on a toujours

$$a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$

  et de plus

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant b_n$$
$$\text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1/2$, elle est de limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite c'.
Comme f est continue sur I, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c')$.
Or par construction

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$$

donc $f(c') = 0$. Le réel c' est donc le réel c cherché. □

Exemple

- si P est une fonction polynôme de degré impair, alors P admet une racine réelle.
- (pour traverser une rivière sans pont, il faut se mouiller !) si f et g sont deux fonctions définies sur $[\,0\,;1\,]$ telles que $f(0)=g(1)=0$ et $f(1)=g(0)=1$ alors il existe un point x tel que $f(x)=g(x)$;
- si f va de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$, alors f admet un point fixe.

Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.
Il existe un point c entre a et b tel que $f(c)=\gamma$.

DÉM. L'hypothèse s'écrit $(f(a)-\gamma)(f(b)-\gamma)<0$. On applique alors le TVI à la fonction $f-\gamma$ qui est continue sur I : il existe c entre a et b tel que $f(c)-\gamma=0$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.4 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.
Alors $f\langle I\rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉM. Prenons α et β dans $f\langle I\rangle$.
Il s'agit de démontrer que si γ est entre α et β alors γ est dans $f\langle I\rangle$.
Soit a et b deux points de I, avec $\alpha=f(a)$ et $\beta=f(b)$. D'après le corollaire précédent, il existe c entre a et b tel que $f(c)=\gamma$. Bien sûr $c\in I$, puisque I est un intervalle. Ainsi $\gamma=f(c)\in f\langle I\rangle$. □

Corollaire 2.5 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit a et b deux éléments de I, éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors*

- *Si f est croissante :*
  - $f\langle]\,a\,;b\,[\rangle = \left]\lim\limits_{a+} f\,;\,\lim\limits_{b-} f\right[$
  - $f\langle [\,a\,;b\,[\rangle = \left[f(a)\,;\,\lim\limits_{b-} f\right[$
  - $f\langle]\,a\,;b\,]\rangle = \left]\lim\limits_{a+} f\,;\,f(b)\right]$
  - $f\langle [\,a\,;b\,]\rangle = [\,f(a)\,;f(b)\,]$
- *Si f est décroissante :*
  - $f\langle]\,a\,;b\,[\rangle = \left]\lim\limits_{b-} f\,;\,\lim\limits_{a+} f\right[$
  - $f\langle]\,a\,;b\,]\rangle = \left[f(b)\,;\,\lim\limits_{a+} f\right[$

– $f\langle[\,a\,;b\,[\rangle = \left]\lim\limits_{b-} f\,;f(a)\right]$
– $f\langle[\,a\,;b\,]\rangle = [\,f(b)\,;f(a)\,]$

En pratique on lit l'image d'un intervalle directement sur le tableau de variations.

Remarque I.1 Si f n'est pas monotone, $f\langle[a\,;b]\rangle$ est en général différent de $[f(a)\,;f(b)]$: par exemple avec $x\mapsto x(1-x)$.
Seul un tableau de variation bien construit permet de conclure.

Remarque I.2 Les intervalles I et $f\langle I\rangle$ ne sont pas nécessairement de même nature :
– avec tan sur $[\,0\,;\pi/2\,[$, l'un est borné, pas l'autre.
– avec sin sur $]\,0\,;\pi\,]$, l'un est semi-ouvert, pas l'autre.
– avec sin sur $]\,0\,;2\pi\,[$, l'un est ouvert, pas l'autre.

Cette remarque justifie l'intérêt du théorème

Théorème 2.6 — Théorème des bornes atteintes
Soit I est un segment *de* $\mathbb{R}$ *et* $f\;:\;I\longrightarrow\mathbb{R}$.
Alors $f\langle I\rangle$ est aussi un segment de $\mathbb{R}$.

DÉM. Admis. Cette démonstration est inaccessible avec les moyens du programme. □

Corollaire 2.7 — *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

DÉM. En effet affirmer que $f\langle[\,a\,;b\,]\rangle = [\,m\,;M\,]$ c'est dire que f est bornée entre m et M et surtout qu'il existe $(c,d)\in[\,a\,;b\,]^2$ tels que $f(c)=m$ et $f(d)=M$. □

III — Théorème de la bijection continue

C'est un théorème important, à la fois en théorie et en pratique. Hélas il est trop souvent confondu avec le TVI.

Théorème 3.1 — Thm. de la bijection continue
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ *et* $f\;:\;I\longrightarrow\mathbb{R}$ *une application strictement monotone.*
– *La fonction f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.*
– *La bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f\langle I\rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f*
– *Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\langle I\rangle$.*

Ce théorème, très important théoriquement, permet de définir une foultitude de fonctions et de s'assurer facilement de leur continuité (notez que la dérivabilité est un autre problème...).

Proposition 3.2 — *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.*
Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

On retrouve ainsi le graphe de nombreuses fonctions connues.

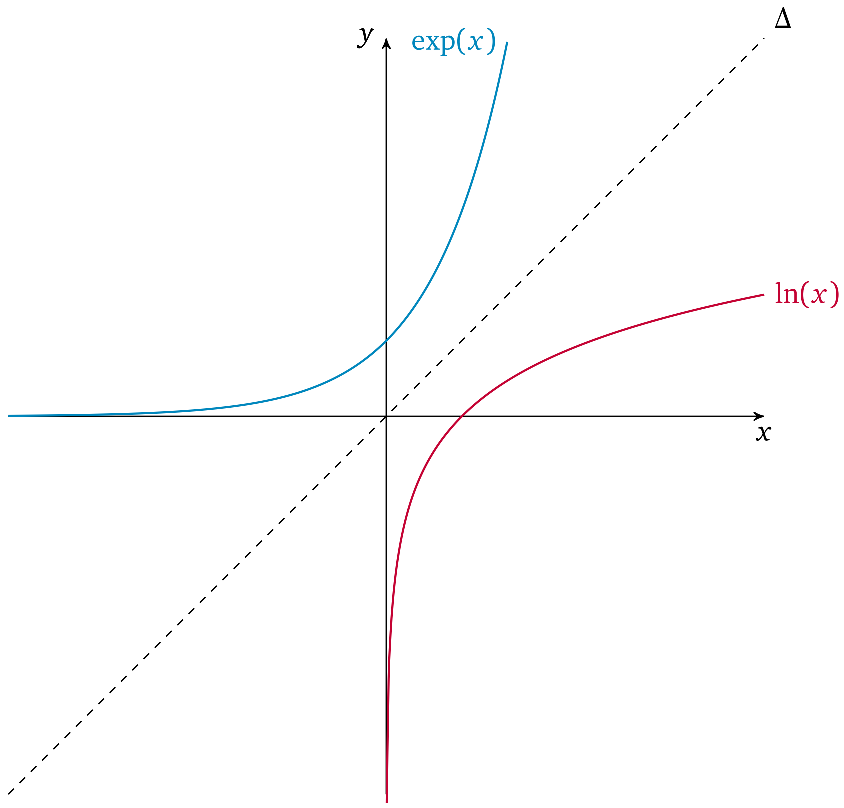


FIGURE I.1 — *Graphes de* ln *et de* exp.

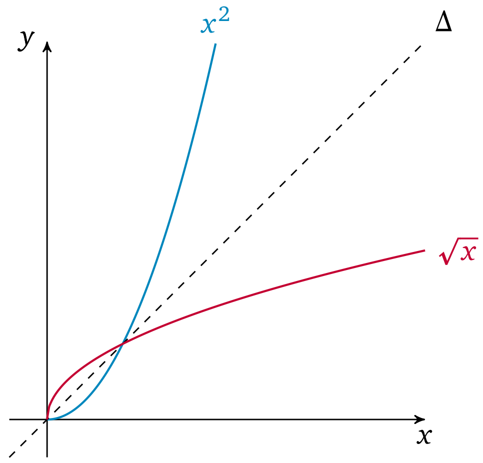
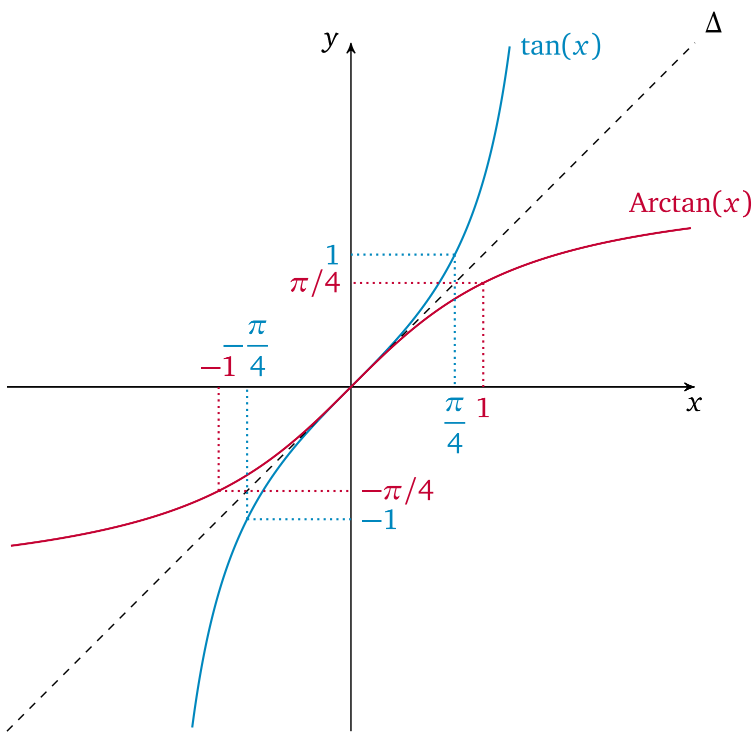


FIGURE I.2 — *Graphes de* $x \mapsto x^2$ *et de* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Application 1 — Définition de la racine n-ième.
Voir le chapitre sur les fonctions usuelles.

Application 2 — Définition de Arcsin, Arccos, Arctan.
Idem.



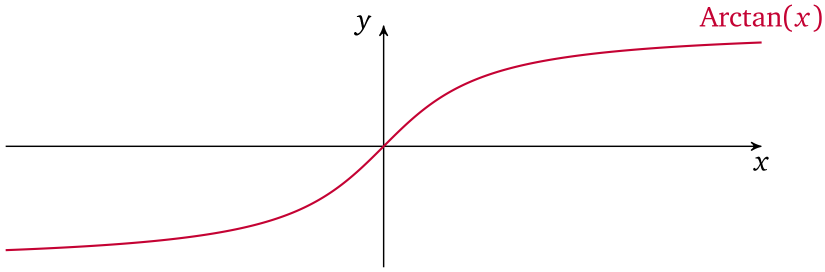


FIGURE I.3 — *Graphe de* Arctan

Corollaire 3.3 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, a et b deux points de I.
Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

DÉM. La nouveauté est dans l'affirmation de l'unicité. □