

# Continuité sur un intervalle

BCPST I — 14 septembre 2017

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :

- $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduite à un point;
- $\mathcal{D}$  est un domaine de  $\mathbb{R}$ .

## I — Fonction continue sur un ensemble

**Définition 1.1** — **Fonction continue sur un ensemble**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $\mathcal{D}$ .

À l'exception de  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ , les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

**Théorème 1.2** — **Opérations algébriques**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un domaine  $\mathcal{D}$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Les fonctions  $\lambda f + \mu g$  et  $f \times g$  sont continues sur  $\mathcal{D}$ .

Si, de plus,  $g$  ne s'annule en aucun point de  $\mathcal{D}$  alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

**Théorème 1.3** — **Composition**

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux domaines de  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ , si  $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$  et si  $g$  est continue sur  $\mathcal{D}'$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

### Exemple

- Les fonctions polynomiales sont continues sur  $\mathbb{R}$ ;
- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  est continue sur son ensemble de définition  $\mathbb{R}_+^*$ .

– Démontrer qu’une fonction donnée est continue grâce à ces théorèmes : rédaction complète.

Exemple avec  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ , avec  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

– Continuité de  $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

**Théorème 1.5 — Composition avec une suite**

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  continue, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels à valeur dans  $\mathcal{D}$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $a \in \mathcal{D}$  alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $f(a)$ .

**Dém.** En effet, par composée de limites la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la limite de  $f$  en  $a$ . Mais comme  $a$  est supposé être dans  $\mathcal{D}$ , et que  $f$  est continue sur  $I$ , la limite de  $f$  en  $a$  n’est autre que  $f(a)$ . □

Ce théorème est utilisé dans l’étude de suite de la forme «  $u_{n+1} = f(u_n)$  ».

**Exemple A** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = \frac{6}{5 + u_n}$$

Cette suite est-elle bien définie ?

Quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

**Exemple B** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$$

est-elle convergente ? Que pouvez-vous dire de sa limite ?

## II — Théorème des valeurs intermédiaires

Le résultat essentiel de cette partie est le théorème des valeurs intermédiaires. On en donne 3 énoncés, qui sont en fait des façons différentes de dire la même chose.

**Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points,  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $I$ .

Si  $f(a)f(b) < 0$  alors il existe un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Dém.** On peut supposer, quitte à les renommer, que  $a \leq b$ .

On va montrer que  $c$  existe en utilisant la méthode de la dichotomie. Définissons pour cela trois suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2} \\ \text{si } f(c_n)f(a_n) \geq 0 \quad a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n \\ \quad \quad \quad \text{sinon} \quad a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{array} \right.$$

L'idée est que tous les points  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont du « même côté » de  $c$ , de même pour les  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et que la distance  $b_n - a_n$  décroît (vite!).

Puisque  $I$  est un intervalle, ces suites sont à valeurs dans  $I$ . Elles sont donc correctement définies car la condition  $f(a_n)f(c_n) \geq 0$  peut toujours être testée.

On va maintenant démontrer que les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

– si  $f(c_n)f(a_n) \geq 0$  alors, d'une part comme  $a_{n+1}$  est au milieu du segment,

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$$

et d'autre part

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

– sinon on a  $f(c_n)f(a_n) < 0$ . D'une part comme  $b_{n+1}$  est au milieu du segment, on a toujours

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$$

et de plus

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \\ \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Comme  $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $1/2$ , elle est de limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite  $c'$ .

Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c')$ .

Or par construction

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

donc  $f(c') = 0$ . Le réel  $c'$  est donc le réel  $c$  cherché. □

### Exemple

- si  $P$  est une fonction polynôme de degré impair, alors  $P$  admet une racine réelle.
- (pour traverser une rivière sans pont, il faut se mouiller!) si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $[0 ; 1]$  telles que  $f(0) = g(1) = 0$  et  $f(1) = g(0) = 1$  alors il existe un point  $x$  tel que  $f(x) = g(x)$ ;
- si  $f$  va de  $[0 ; 1]$  dans  $[0 ; 1]$ , alors  $f$  admet un point fixe.

### Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points. Soit  $a$  et  $b$  dans  $I$  et  $\gamma$  un réel entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Il existe un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

**Dém.** L'hypothèse s'écrit  $(f(a) - \gamma)(f(b) - \gamma) < 0$ . On applique alors le TVI à la fonction  $f - \gamma$  qui est continue sur  $I$  : il existe  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) - \gamma = 0$ , d'où le résultat. □

### Corollaire 2.4 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points.

Alors  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Dém.** Prenons  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $f(I)$ .

Il s'agit de démontrer que si  $\gamma$  est entre  $\alpha$  et  $\beta$  alors  $\gamma$  est dans  $f(I)$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $I$ , avec  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = f(b)$ . D'après le corollaire précédent, il existe  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = \gamma$ . Bien sûr  $c \in I$ , puisque  $I$  est un intervalle. Ainsi  $\gamma = f(c) \in f(I)$ . □

**Corollaire 2.5** — Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ , éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors

- 1) Si  $f$  est croissante :

$$\begin{aligned}
 - f \langle ] a ; b [ \rangle &= \left] \lim_{a^+} f ; \lim_{b^-} f \left[ \right. \\
 - f \langle [ a ; b [ \rangle &= \left[ f(a) ; \lim_{b^-} f \left[ \right. \\
 - f \langle ] a ; b ] \rangle &= \left] \lim_{a^+} f ; f(b) \right] \\
 - f \langle [ a ; b ] \rangle &= \left[ f(a) ; f(b) \right]
 \end{aligned}$$

2) Si  $f$  est décroissante :

$$\begin{aligned}
 - f \langle ] a ; b [ \rangle &= \left] \lim_{b^-} f ; \lim_{a^+} f \left[ \right. \\
 - f \langle [ a ; b [ \rangle &= \left[ f(b) ; \lim_{a^+} f \left[ \right. \\
 - f \langle ] a ; b ] \rangle &= \left] \lim_{b^-} f ; f(a) \right] \\
 - f \langle [ a ; b ] \rangle &= \left[ f(b) ; f(a) \right]
 \end{aligned}$$

En pratique on lit l'image d'un intervalle directement sur le tableau de variations.

**Remarque I.1** Si  $f$  n'est pas monotone,  $f \langle [a ; b] \rangle$  est en général différent de  $[f(a) ; f(b)]$  : par exemple avec  $x \mapsto x(1-x)$ .

Seul un tableau de variation bien construit permet de conclure.

**Remarque I.2** Les intervalles  $I$  et  $f \langle I \rangle$  ne sont pas nécessairement de même nature :

- avec  $\tan$  sur  $]0 ; \pi/2[$ , l'un est borné, pas l'autre.
- avec  $\sin$  sur  $]0 ; \pi]$ , l'un est semi-ouvert, pas l'autre.
- avec  $\sin$  sur  $]0 ; 2\pi[$ , l'un est ouvert, pas l'autre.

Cette remarque justifie l'intérêt du théorème

**Théorème 2.6 — Théorème des bornes atteintes**

Soit  $I$  est un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors  $f \langle I \rangle$  est aussi un segment de  $\mathbb{R}$ .

**Dém.** Admis. Cette démonstration est inaccessible avec les moyens du programme. □

**Corollaire 2.7** — Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Dém.** En effet affirmer que  $f \langle [a ; b] \rangle = [m ; M]$  c'est dire que  $f$  est bornée entre  $m$  et  $M$  et surtout qu'il existe  $(c, d) \in [a ; b]^2$  tels que  $f(c) = m$  et  $f(d) = M$ . □

### III — Théorème de la bijection continue

C'est un théorème important, à la fois en théorie et en pratique. Hélas il est trop souvent confondu avec le TVI.

#### **Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue**

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une application strictement monotone.

- La fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f \langle I \rangle$ .
- La bijection réciproque  $f^{-1}$ , définie sur  $f \langle I \rangle$ , est strictement monotone, et de même monotonie que  $f$ .
- Si, de plus,  $f$  est continue, alors  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $f \langle I \rangle$ .

Ce théorème, très important théoriquement, permet de définir une foultitude de fonctions et de s'assurer facilement de leur continuité (notez que la dérivabilité est un autre problème...).

**Proposition 3.2** — Soit  $f : I \longrightarrow J$  une fonction bijective définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans un intervalle  $J$ .

Le graphe de la bijection réciproque  $f^{-1}$  est symétrique de celui de  $f$  par rapport à la première bissectrice.

On retrouve ainsi le graphe de nombreuses fonctions connues.

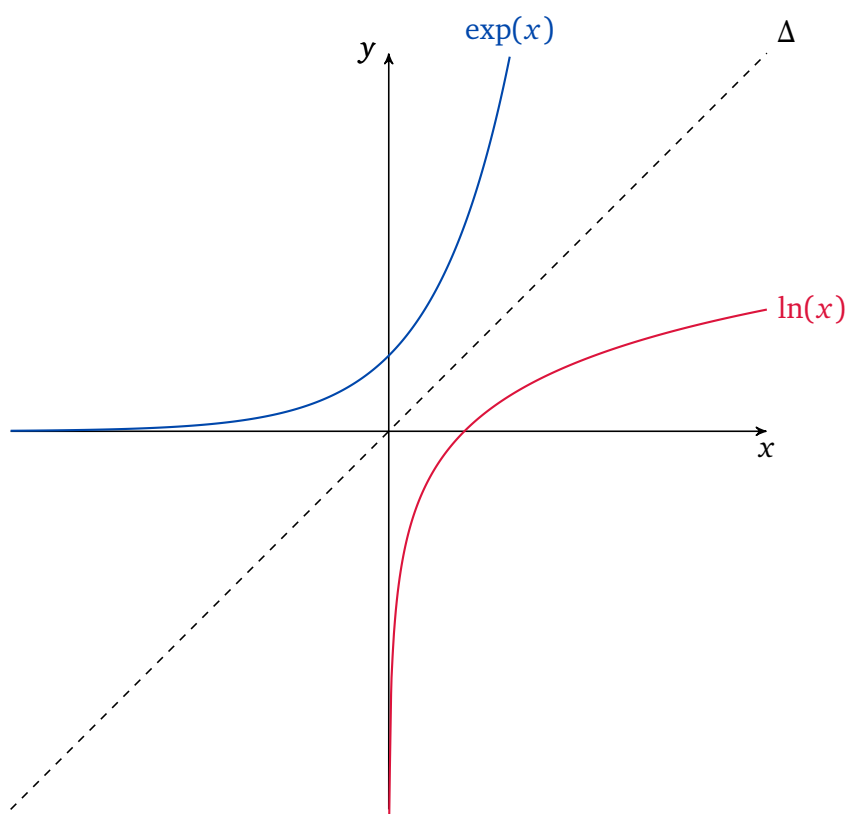


FIGURE I.1 — Graphes de  $\ln$  et de  $\exp$ .

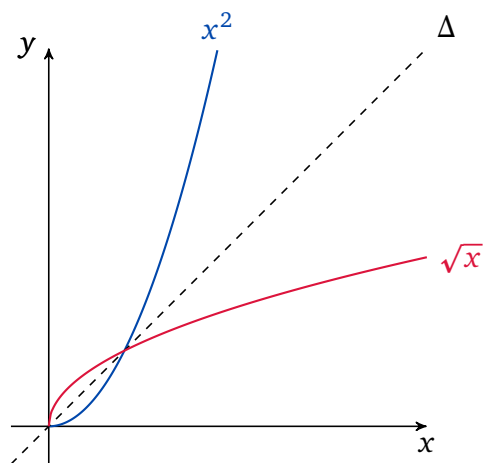


FIGURE I.2 — Graphes de  $x \mapsto x^2$  et de  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

**Application 1 — Définition de la racine  $n$ -ième.**

Voir le chapitre sur les fonctions usuelles.

**Application 2 — Définition de Arcsin, Arccos, Arctan.**

Idem.

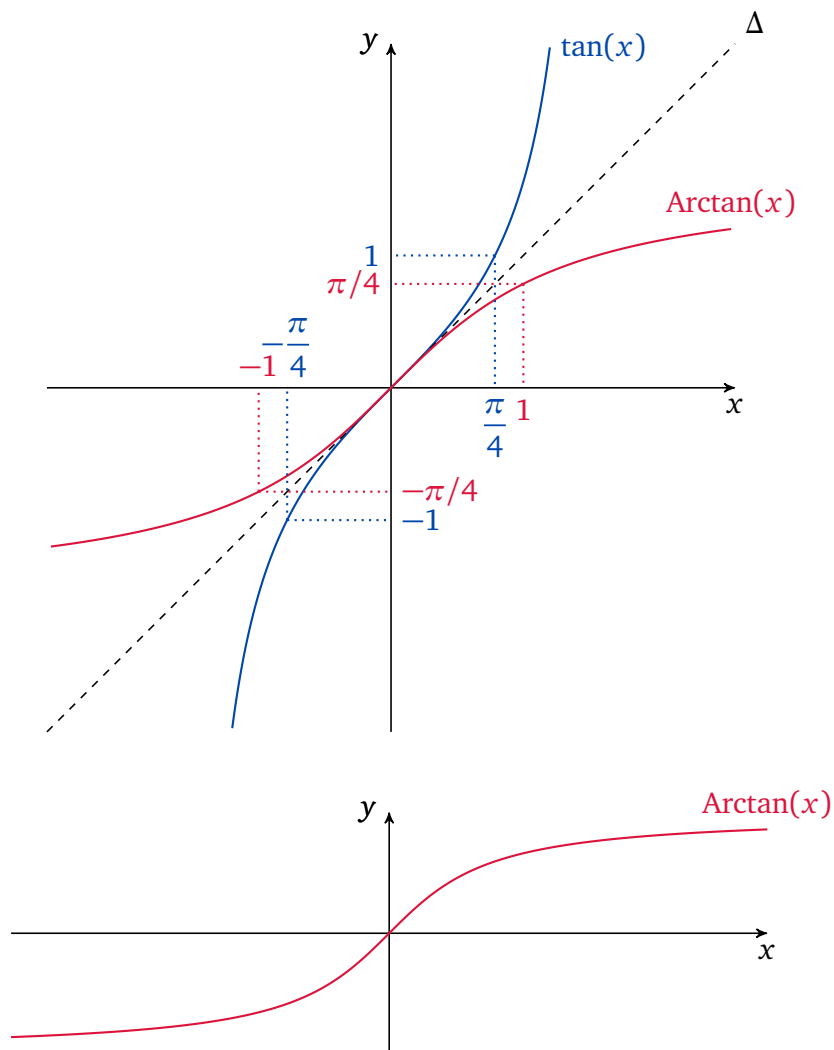


FIGURE I.3 — Graphe de Arctan

**Corollaire 3.3 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »**

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux points de  $I$ .

Si  $f(a) f(b) < 0$  alors il existe un unique point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = 0$ .



**Dém.** La nouveauté est dans l'affirmation de l'unicité. □