

Nombres complexes

BCPST I — 24 octobre 2017

I — Définition de \mathbb{C} – Écriture algébrique

I.1 — Nombres complexes

Définition 1.1 — Nombres complexes

On appelle *ensemble des nombres complexes* et on note \mathbb{C} l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des deux opérations suivantes

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,$$

addition $(x, y) + (x', y') \stackrel{\text{déf.}}{=} (xx', yy')$

multiplication $(x, y) \times (x', y') \stackrel{\text{déf.}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y)$

Ces deux opérations ont les propriétés usuelles des opérations sur les nombres réels : commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, existence d'un élément neutre pour $+$ et pour \times , existence d'un opposé pour l'addition, de l'inverse d'un complexe non nul pour la multiplication.

I.2 — Notation algébrique

Ces opérations sont plus simples d'emploi en utilisant les notations

$$1 \text{ pour } (1, 0) \quad i \text{ pour } (0, 1) \quad x + iy \text{ pour } (x, y)$$

On constate alors que l'on peut calculer « comme dans \mathbb{R} » en adoptant la convention $i \times i = -1$.

Remarque I.1 Toutefois, on ne peut pas définir sur \mathbb{C} de relation d'ordre qui prolonge la relation d'ordre de \mathbb{R} . En effet, supposons qu'une telle relation d'ordre existe. Alors le complexe i est soit positif, soit négatif.

Si $i \geq 0$ alors $i \times i \geq 0$, donc $-1 \geq 0$, ce qui est absurde. Si $i \leq 0$ alors $i \times i \geq 0$ également (en multipliant par un nombre négatif, on modifie le sens de l'inégalité), donc $-1 \geq 0$, ce qui est également absurde.

On vient de montrer par l'absurde qu'une telle relation d'ordre n'existe pas.

Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire

Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $z = x + iy$.

Le réel x est la *partie réelle* de z notée $\operatorname{Re}(z)$; le réel y est sa *partie imaginaire*, notée $\operatorname{Im}(z)$.

On identifie le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ avec \mathbb{R} .

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, z est un *imaginaire pur*. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$$

Théorème 1.4 — Cas d'égalité

Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$:

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

Il est équivalent de donner un complexe $z = x + iy$ ou un point $M(x, y)$ du plan \mathbb{R}^2 . On dit que z est l'*affiche* de M ou que M est l'*image* de z .

Application 1 — Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = 8 - 6i$.

Pour cela, on pose $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, en égalant les parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x = -3/y \end{cases}$$

Cette dernière égalité est vraie, car $y = 0$ n'est pas une solution possible. En reportant dans la première ligne, on trouve

$$\begin{cases} 9/y^2 - y^2 = 8 \\ x = -3/y \end{cases} \iff \begin{cases} 9 - y^4 = 8y^2 \\ x = -3/y \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 + 8y^2 - 9 = 0 \\ x = -3/y \end{cases}$$

Pour résoudre la première équation, posons $Y = y^2$. Puisque $y \in \mathbb{R}$, on a $Y \in \mathbb{R}_+$. Ainsi

$$Y^2 + 8Y - 9 = 0 \iff Y = 1 \text{ ou } Y = -9$$

La solution $Y = -9$ n'est pas admissible ici car elle est négative. Ainsi $Y = 1$, donc $y = 1$, auquel cas $x = -3/1 = -3$, ou bien $y = -1$ et donc $x = 3$.

Le problème posé a donc pour solutions $3 - i$ ou $-3 + i$.

1.3 — Conjugué

Le conjugué est un intermédiaire de calcul commode pour obtenir les parties réelles et imaginaires, ainsi que l'inverse d'un nombre complexe.

Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z et on note \bar{z} le complexe $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$.

L'image de \bar{z} est le symétrique par rapport à (Ox) de l'image de z .

Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z & \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}' & \overline{z^n} &= \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}) & \overline{\frac{1}{z}} &= \frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$

Application 2 Soit P un polynôme à coefficients réels. Si z est racine de P , alors \bar{z} est aussi racine de P .

Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Exercice 1**
1. Donner l'inverse de $1 + i$, de $4 - 5i$;
 2. Expliciter la forme cartésienne de $(1 + 2i)/(3 + i)$.

Propriété 1.8 — Soit $z \in \mathbb{C}$:

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

II — Notation exponentielle

II.1 — Module

Définition 2.1 — **Module d'un nombre complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre $x^2 + y^2$ est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$$

que l'on appelle le **module** du nombre complexe z .

Le module d'un nombre réel coïncide avec sa valeur absolue.

Géométriquement, $|z|$ est la distance entre l'image de z et l'origine. De même, si z et z' sont deux complexes, $|z - z'|$ est la distance entre les images de z et z' .

Propriété 2.2 — **Propriétés du module**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z| |z'| & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ |z| = 0 &\iff z = 0 & |z| &= |\bar{z}| \\ |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| & |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

Dém. Pour l'avant dernière : $x^2 \leq x^2 + y^2$, puis on prend la racine carrée pour trouver $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. \square

Théorème 2.3 — **Inégalité triangulaire**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

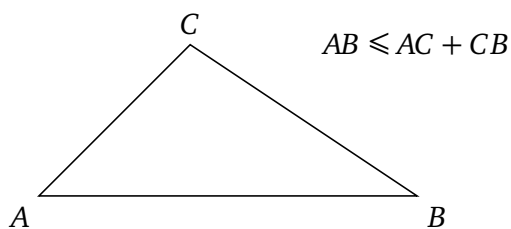
Dém. Pour la première, élever les deux membres au carré et utiliser le conjugué et $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

Pour la seconde, on applique la première aux sommes $z = (z - z') + z'$ et $z' = (z' - z) + z$. \square

Corollaire 2.4 — Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$: $|c - a| \leq |b - a| + |c - b|$

Au sens strict, c'est ce corollaire qu'on devrait appeler « inégalité triangulaire ». Si on considère trois points A, B et C du plan, alors l'inégalité précédente se traduit en termes de distances par

$$AB \leq AC + CB$$



La ligne droite AB est un chemin plus court entre A et B que la ligne brisée ABC .

FIGURE I.1 — *Interprétation de l'inégalité triangulaire*

II.2 — Définition

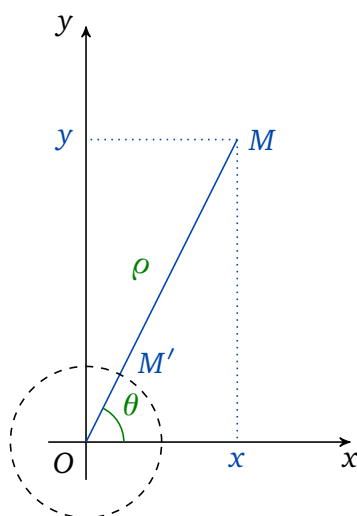


FIGURE I.2 — Coordonnées polaire vs. cartésiennes.

Un point M de \mathbb{R}^2 peut être repéré par plusieurs couples de réels. Les coordonnées cartésiennes (x, y) sont les plus évidentes. Un autre couple est également fort utile.

Théorème & Définition 2.5 — Coordonnées polaires

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un couple (ρ, θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

- Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2 + y^2$. On retrouve le module de z .
- Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans \mathbb{R} .
- Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est un **argument** de z . L'unique réel $\theta_0 \in]-\pi ; \pi]$ vérifiant la relation précédente s'appelle l'**argument principal** de z .

Dém. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $(x, y) = (0, 0)$ alors $\rho = 0$ et pour θ quelconque dans \mathbb{R} on a

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

Supposons maintenant $(x, y) \neq (0, 0)$. Alors le point $M' \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho} \right)$ est sur le cercle trigonométrique. D'après la définition d'un angle, il existe alors un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

M ait pour coordonnées cartésiennes $(\cos \theta, \sin \theta)$. C'est-à-dire que

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

ou encore
$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

Toujours dans le cas $(x, y) \neq (0, 0)$. Si (ρ', θ') est un autre couple de réel vérifiant la même propriété, alors

$$\rho'^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \implies \rho' = \rho \quad \text{car } \rho > 0 \text{ et } \rho' > 0.$$

Par ailleurs, en utilisant les formules d'addition des cosinus, on trouve $\cos(\theta - \theta') = 1$ et de même $\sin(\theta - \theta') = 0$, ce qui prouve que $\theta - \theta' = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). \square

II.3 — Notation exponentielle

Intéressons nous momentanément à $z(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. D'après les formules de trigonométries usuelles

$$\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}, \quad z(\theta) z(\theta') = z(\theta + \theta')$$

C'est la propriété caractéristique de la notation puissance. On pourrait donc écrire

$$\cos \theta + i \sin \theta = (?)^\theta$$

avec (?) un complexe constant à déterminer. Pour des raisons d'Analyse, on est amené à noter $(?) = e^i$, avec e la base de l'exponentielle réelle. En conclusion

Définition 2.6 — Notation exponentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$e^{i\alpha} \stackrel{\text{déf.}}{=} \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Propriété 2.7 — Relation fondamentale

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

et donc
$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}} \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} \quad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Théorème 2.8 — Notation exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Valeurs remarquables

$$\begin{aligned} \arg(1) &\equiv 0 [2\pi] & \arg(i) &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \arg(-1) &\equiv \pi [2\pi] & \arg(-i) &\equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

Propriété 2.9 — Cas d'égalité

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi$$

II.4 — Argument**Définition 2.10 — Argument d'un nombre complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r e^{i\theta}$.

Tout nombre réel θ vérifiant la relation précédente est *un argument* de z .

Propriété 2.11 — Soit $z \in \mathbb{C}$, θ et θ' deux arguments de z . Alors

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Dém. Avec les propriétés de cos et sin. □

On note parfois $\arg(z)$ un argument de z . La relation précédente se note parfois $\theta' = \theta[2\pi]$.

Propriété 2.12 — Propriété de l'argument

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

Dans ce sens, les propriétés de arg peuvent faire penser à celles de log. Toutefois, il faut bien prendre garde à ce que arg n'est pas une application de \mathbb{C} dans \mathbb{R} ! En effet à un complexe elle associe un ensemble de réels.

- Exercice 2**
- Donner la forme trigonométrique de $\left(\frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}\right)$
 - puis celle de $(\sqrt{3} + i)^6$.

	Notation cartésienne	Notation polaire
	$z = x + iy$	$z = re^{i\theta}$
passage	$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$	$r^2 = x^2 + y^2$ $\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$
égalité	$z = z' \iff x = x' \text{ et } y = y'$	$z = z' \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]$
conjugué	$\bar{z} = x - iy$	$\bar{z} = re^{-i\theta}$
somme	$z + z' = (x + x') + i(y + y')$...
Produit	$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$	$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
puissance	...	$z^n = r^n e^{in\theta}$
inverse	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
quotient	...	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

FIGURE I.3 — Opérations en notation cartésienne et polaire

III — Applications des nombres complexes

III.1 — Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 3.1 — Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$.

On définit l'exponentielle de z par

$$\exp(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp(x) e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Notez qu'à droite de l'égalité tous les termes sont bien définis. Notez également que $\exp(z)$ est donné sous forme trigonométrique : son module est $\exp(x)$ et un argument est y .

Cette exponentielle complexe vérifie les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle. En particulier

Propriété 3.2 — Soit z et z' deux complexes. On a

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$$

Dém. En effet, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$\exp(z + z') = \exp(x + x')e^{i(y+y')} = \exp(x)\exp(x')e^{iy}e^{iy'} = \exp(z)\exp(z')$$

□

Par suite toutes les propriétés algébriques de l'exponentielle sont conservées. Nous verrons que les propriétés analytiques (continuité, dérivabilité) le sont aussi, dans un sens à préciser.

III.2 — Trigonométrie

L'expression $a \cos(x) + b \sin(x)$ peut se simplifier en mettant en facteur $\sqrt{a^2 + b^2}$. En effet

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cos(x) + \frac{b}{a^2 + b^2} \sin(x) \right)$$

Comme le nombre complexe $\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2}$ est de module 1, il peut s'écrire $e^{i\alpha}$. On a donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{a}{a^2 + b^2} = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{b}{a^2 + b^2} = \sin \alpha$$

soit

$$\begin{aligned} a \cos(x) + b \sin(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cos(x) + \frac{b}{a^2 + b^2} \sin(x) \right) \\ &= A(\cos(x) \cos(\alpha) + \sin(x) \sin(\alpha)) \\ &= A \cos(x + \alpha) \end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

III.3 — Formules d'Euler

Propriété 3.3 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$

Cette propriété se réécrit plus fréquemment sous la forme

Proposition 3.4 — Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application 3 — Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$

Les expressions en $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ sont parfois pénibles à manipuler (penser par exemple à une recherche de primitive). On peut les linéariser grâce aux formules d'Euler. Voici un exemple

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^4 && \text{formule d'Euler} \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-i4x}) \\ &&& \text{binôme de Newton} \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{2^4} (2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6) && \text{formule d'Euler} \\ \cos^4(x) &= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Application 4 — Méthode de l'arc moitié

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est le module de $1 + e^{i\theta}$?

On utilise la méthode de l'arc moitié, qui consiste à mettre en facteur $e^{i\theta/2}$ ce qui donne

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2e^{i\theta/2} \cos(\theta/2)$$

Ainsi $|1 + e^{i\theta}| = 2|\cos(\theta/2)|$. Attention à la valeur absolue !

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Quel est le module de $e^{ia} + e^{ib}$?

La méthode de l'arc moitié consiste ici à mettre en facteur $e^{i(a+b)/2}$. On trouve $|e^{ia} + e^{ib}| = 2|\cos((a+b)/2)|$.

III.4 — Formule de Moivre

Proposition 3.5 — Formules de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$

$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$

Cette formule s'utilise avec le binôme de Newton pour exprimer $\cos 2\theta$, $\sin 3\theta$, etc. en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. C'est le calcul inverse de la linéarisation. Par exemple

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) &= \operatorname{Im} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^3 \right] \\ &= \operatorname{Im}(\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta) \quad \text{binôme} \\ \sin(3\theta) &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{aligned}$$