Nombres complexes

BCPST I — 14 septembre 2017

I — Définition de $\mathbb{C}$ – Écriture algébrique

I.1 — Nombres complexes

Définition 1.1 — Nombres complexes
On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2,$$

addition $$(x,y)+(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx',yy')$$

multiplication $$(x,y)\times(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx'-yy',xy'+x'y)$$

Ces deux opérations ont les propriétés usuelles des opérations sur les nombres réels : commutatitivité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, existence d'un élément neutre pour $+$ et pour $\times$, existence d'un opposé pour l'addition, de l'inverse d'un complexe non nul pour la multiplication.

I.2 — Notation algébrique

Ces opérations sont plus simples d'emploi en utilisant les notations

$$1 \quad \text{pour} \quad (1,0) \qquad \mathrm{i} \quad \text{pour} \quad (0,1) \qquad x+\mathrm{i}y \quad \text{pour} \quad (x,y)$$

On constate alors que l'on peut calculer « comme dans $\mathbb{R}$ » en adoptant la convention $\mathrm{i}\times\mathrm{i}=-1$.

Remarque I.1 Toutefois, on ne peut pas définir sur $\mathbb{C}$ de relation d'ordre qui prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$. En effet, supposons qu'une telle relation d'ordre existe. Alors le complexe i est soit positif, soit négatif.

Si $\mathrm{i} \geqslant 0$ alors $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \geqslant 0$, donc $-1 \geqslant 0$, ce qui est absurde. Si $\mathrm{i} \leqslant 0$ alors $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \geqslant 0$ également (en multipliant par un nombre négatif, on modifie le sens de l'inégalité), donc $-1 \geqslant 0$, ce qui est également absurde.

On vient de montrer par l'absurde qu'une telle relation d'ordre n'existe pas.

Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire

Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $z = x + \mathrm{i}y$.

Le réel x est la partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$; le réel y est sa partie imaginaire, notée $\mathrm{Im}(z)$.

On identifie le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Im}(z) = 0\}$ avec $\mathbb{R}$.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Re}(z) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Im}(z)$$

Théorème 1.4 — Cas d'égalité

Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$:

$$x + \mathrm{i}\,y = x' + \mathrm{i}\,y' \iff x = x' \qquad \textit{et} \qquad y = y'$$

Il est équivalent de donner un complexe $z = x + iy$ ou un point $M(x, y)$ du plan $\mathbb{R}^2$. On dit que z est l'affixe de M ou que M est l'image de z.

Application 1 — Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = 8 - 6\mathrm{i}$.

Pour cela, on pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$, en égalant les parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x = -3/y \end{cases}$$

Cette dernière égalité est vraie, car $y = 0$ n'est pas une solution possible. En reportant dans la première ligne, on trouve

$$\begin{cases} 9/y^2 - y^2 = 8 \\ x = -3/y \end{cases} \iff \begin{cases} 9 - y^4 = 8y^2 \\ x = -3/y \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 + 8y^2 - 9 = 0 \\ x = -3/y \end{cases}$$

Pour résoudre la première équation, posons $Y = y^2$. Puisque $y \in \mathbb{R}$, on a $Y \in \mathbb{R}_+$. Ainsi

$$Y^2 + 8Y - 9 = 0 \iff Y = 1 \text{ou} Y = -9$$

La solution $Y = -9$ n'est pas admissible ici car elle est négative. Ainsi $Y = 1$, donc $y = 1$, auquel cas $x = -3/1 = -3$, ou bien $y = -1$ et donc $x = 3$.

Le problème posé a donc pour solutions $3 - \mathrm{i}$ ou $-3 + \mathrm{i}$.

I.3 — Conjugué

Le conjugué est un intermédiaire de calcul commode pour obtenir les parties réelles et imaginaires, ainsi que l'inverse d'un nombre complexe.

Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, *avec* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué *de* z *et on note* $\overline{z}$ *le complexe* $\overline{z} \overset{\text{déf.}}{=} x - iy$.

L'image de $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à (Ox) de l'image de z.

Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Application 2 Soit P un polynôme a coefficients réels. Si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + \mathrm{i}y$ *avec* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *alors*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Exercice 1 1. Donner l'inverse de $1+\mathrm{i}$, de $4-5\mathrm{i}$;

2. Expliciter la forme cartésienne de $(1+2\mathrm{i})/(3+\mathrm{i})$.

Propriété 1.8 — *Soit $z \in \mathbb{C}$:*

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
- *z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.*

II — Notation exponentielle

II.1 — Module

Définition 2.1 — **Module d'un nombre complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre $x^2 + y^2$ est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$$

que l'on appelle le module du nombre complexe z.

Le module d'un nombre réel coïncide avec sa valeur absolue.

Géométriquement, $|z|$ est la distance entre l'image de z et l'origine. De même, si z et z' sont deux complexes, $\left|z-z'\right|$ est la distance entre les images de z et z'.

Propriété 2.2 — **Propriétés du module**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad |z| = |\overline{z}|$$

$$|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$$

Dém. Pour l'avant dernière : $x^2 \leqslant x^2 + y^2$, puis on prend la racine carrée pour trouver $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. □

Théorème 2.3 — **Inégalité triangulaire**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\left|z + z'\right| \leqslant \left|z\right| + \left|z'\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \leqslant \left|z - z'\right|$$

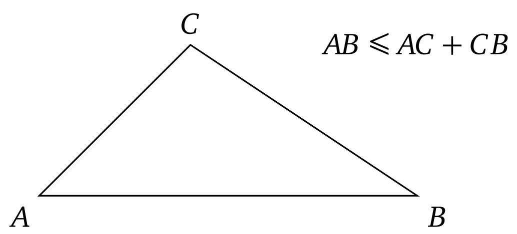
Dém. Pour la première, élever les deux membres au carré et utiliser le conjugué et $|\text{Re}(z)| \leqslant |z|$.

Pour la seconde, on appliquer la première aux sommes $z = (z - z') + z'$ et $z' = (z' - z) + z$. □

Corollaire 2.4 — *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ *:* $\quad |c - a| \leqslant |b - a| + |c - b|$

Au sens strict, c'est ce corollaire qu'on devrait appeler « inégalité triangulaire ». Si on considère trois points A, B et C du plan, alors l'inégalité précédente se traduit en termes de distances par

$$AB \leqslant AC + CB$$



La ligne droite AB est un chemin plus court entre A et B que la ligne brisée ABC.

FIGURE I.1 — *Interprétation de l'inégalité triangulaire*

II.2 — Défition

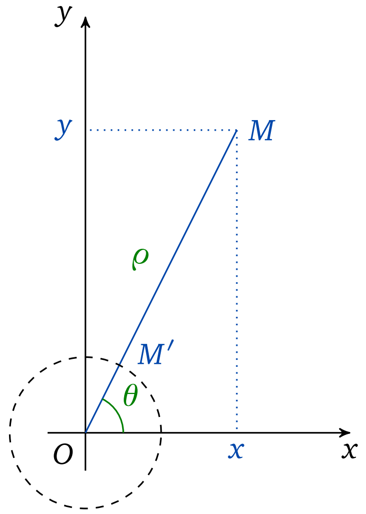


FIGURE I.2 — *Coordonnées polaire vs. cartésiennes.*

Un point M de $\mathbb{R}^2$ peut être repéré par plusieurs couples de réels. Les coordonnées cartésiennes (x, y) sont les plus évidentes. Un autre couple est également fort utile.

Théorème & Définition 2.5 — Coordonnées polaires

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un couple (ρ, θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

- *Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2 + y^2$. On retrouve le module de z.*
- *Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est un* argument *de z. L'unique réel $\theta_0 \in \,]-\pi\,;\pi\,]$ vérifiant la relation précédente s'appelle l'*argument principal *de z.*

Dém. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Si $(x, y) = (0, 0)$ alors $\rho = 0$ et pour θ quelconque dans $\mathbb{R}$ on a

$$x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

Supposons maintenant $(x, y) \neq (0, 0)$. Alors le point $M'\left(\dfrac{x}{\rho}, \dfrac{y}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique. D'après la définition d'un angle, il existe alors un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

M ait pour coordonnées cartésienne $(\cos\theta, \sin\theta)$. C'est-à-dire que

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

ou encore
$$x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

Toujours dans le cas $(x, y) \neq (0, 0)$. Si (ρ', θ') est un autre couple de réel vérifiant la même propriété, alors

$$\rho'^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \Longrightarrow \rho' = \rho \qquad \text{car } \rho > 0 \text{ et } \rho' > 0.$$

Par ailleurs, en utilisant les formules d'addition des cosinus, on trouve $\cos(\theta - \theta') = 1$ et de même $\sin(\theta - \theta') = 0$, ce qui prouve que $\theta - \theta' = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

II.3 — Notation exponentielle

Intéressons nous momentanément à $z(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. D'après les formules de trigonométries usuelles

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}, \quad z(\theta)\, z(\theta') = z(\theta + \theta')$$

C'est la propriété caractéristique de la notation puissance. On pourrait donc écrire

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = (?)^\theta$$

avec $(?)$ un complexe constant à déterminer. Pour des raisons d'Analyse, on est amené à noter $(?) = \mathrm{e}^i$, avec e la base de l'exponentielle réelle. En conclusion

Définition 2.6 — Notation exponentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \overset{\text{déf.}}{=} \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$$

Propriété 2.7 — Relation fondamentale

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$$

et donc
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Théorème 2.8 — Notation exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Valeurs remarquables

$$\arg(1) \equiv 0 \ [2\pi] \qquad \arg(\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

$$\arg(-1) \equiv \pi \ [2\pi] \qquad \arg(-\mathrm{i}) \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$$

Propriété 2.9 — Cas d'égalité

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, *de notations exponentielles* $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ *et* $z' = \rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ \alpha = \beta + 2k\pi$$

II.4 — Argument

Définition 2.10 — Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Tout nombre réel θ *vérifiant la relation précédente est un argument de* z.

Propriété 2.11 — *Soit* $z \in \mathbb{C}$, θ *et* θ' *deux arguments de* z. *Alors*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Dém. Avec les propriétés de cos et sin. □

On note parfois $\arg(z)$ un argument de z. La relation précédente se note parfois $\theta' = \theta[2\pi]$.

Propriété 2.12 — Propriété de l'argument

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi]$ *si* $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$ *si* $a \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

Dans ce sens, les propriétés de arg peuvent faire penser à celles de log. Toutefois, il faut bien prendre garde à ce que arg n'est pas une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$! En effet à *un* complexe elle associe un *ensemble* de réels.

Exercice 2 1. Donner la forme trigonométrique de $\left(\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^2}\right)$

2. puis celle de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6$.

	Notation cartésienne	Notation polaire
	$z = x + \mathrm{i}y$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
passage	$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$	$r^2 = x^2 + y^2$ $\tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r} \quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$
égalité	$z = z' \iff x = x' \text{ et } y = y'$	$z = z' \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$
conjugué	$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$	$\bar{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$
somme	$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$	$\dots$
Produit	$z \times z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$	$z \times z' = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
puissance	$\dots$	$z^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$
inverse	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$
quotient	$\dots$	$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$

FIGURE I.3 — *Opérations en notation cartésienne et polaire*

III — Applications des nombres complexes

III.1 — Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 3.1 — Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$.

On définit l'exponentielle de z par

$$\exp(z) \overset{\text{déf.}}{=} \exp(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$$

Notez qu'à droite de l'égalité tous les termes sont bien défini. Notez également que $\exp(z)$ est donné sous forme trigonométrique : son module est $\exp(x)$ et un argument est y.

Cette exponentielle complexe vérifie les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle. En particulier

Propriété 3.2 — *Soit z et z' deux complexes. On a*

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')$$

Dém. En effet, si $z = x + \mathrm{i}y$ et $z = x' + \mathrm{i}y'$ alors

$$\exp(z+z') = \exp(x+x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+y')} = \exp(x)\exp(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y'} = \exp(z)\exp(z')$$

□

Par suite toutes les propriétés algébriques de l'exponentielle sont conservées. Nous verrons que les propriétés analytiques (continuité, dérivabilité) le sont aussi, dans un sens à préciser.

III.2 — Trigonométrie

L'expression $a\cos(x) + b\sin(x)$ peut se simplifier en mettant en facteur $\sqrt{a^2+b^2}$. En effet

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(x) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(x)\right)$$

Comme le nombre complexe $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\dfrac{b}{a^2+b^2}$ est de module 1, il peut s'écrire $\mathrm{e}^{i\alpha}$. On a donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \qquad \frac{a}{a^2+b^2} = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a^2+b^2} = \sin\alpha$$

soit

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(x) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(x)\right) \\ &= A(cos(x)\cos(\alpha) + \sin(x)\sin(\alpha)) \\ &= A\cos(x+\alpha) \end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

III.3 — Formules d'Euler

Propriété 3.3 — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition* $\cos\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ *et* $\sin\theta = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$

Cette propriété se réécrit plus fréquemment sous la forme

Proposition 3.4 — Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Application 3 — Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$

Les expressions en $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ sont parfois pénibles à manipuler (penser par exemple à une recherche de primitive). On peut les linéariser grâce aux formules d'Euler. Voici un exemple

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right]^4 && \text{formule d'Euler} \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}-4x}\right) \\
& && \text{binôme de Newton} \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}-4x}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right) && \text{formule d'Euler} \\
\cos^4(x) &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Application 4 — Méthode de l'arc moitié

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est le module de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?

On utilise la méthode de l'arc moitié, qui consiste à mettre en facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ ce qui donne

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}-\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\cos(\theta/2)$$

Ainsi $\left|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 2\left|\cos(\theta/2)\right|$. Attention à la valeur absolue !

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Quel est le module de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$?

La méthode de l'arc moitié consiste ici à mettre en facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)/2}$. On trouve $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\right| = 2\left|\cos((a+b)/2)\right|$.

III.4 — Formule de Moivre

Proposition 3.5 — Formules de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left[\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n\,\right]$$
$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left[\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n\,\right]$$

Cette formule s'utilise avec le binôme de Newton pour exprimer $\cos 2\theta$, $\sin 3\theta$, etc. en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. C'est le calcul inverse de la linéarisation. Par exemple

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \mathrm{Im}\left[\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3\,\right] \\ &= \mathrm{Im}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta) \quad \text{binôme} \\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\end{aligned}$$