

Comparaison de fonction

BCPST I, 26/09/2018

Ce chapitre est consacré aux principales méthodes de calcul « manuelles » des limites. Dans toute cette partie, \mathcal{D} est un intervalle de \mathbb{R} , x_0 est un point ou une borne (éventuellement infinie) de \mathcal{D} et f et g sont deux fonctions de \mathcal{D} dans \mathbb{R} .

On suppose que le problème de la définition des fonctions a été étudié au préalable, et on ne se s'intéresse qu'au calcul de limite proprement dit. Mais il n'est pas interdit de vérifier mentalement l'existence des expressions !

I — Négligeabilité

Définition 1.1 — On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.
Dans ces conditions, on note « $f = o(g)$ au voisinage de x_0 », ou bien $f = o_{x_0}(g)$, ou simplement (lorsque le contexte est clair) $f = o(g)$.

Exemple

- Au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$, tandis qu'au voisinage de $+\infty$, $x = o(x^2)$... d'où l'importance du point de référence !
- Au voisinage de $+\infty$, $x/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $x = o(e^x)$. De même $\ln(x) = o(x)$.

Ces résultats se généralisent.

Propriété 1.3 — Prépondérants classiques en $+\infty$

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\iff x^\alpha = o(x^\beta) & \alpha > 0 &\implies \ln(x) = o(x^\alpha) \\ \alpha > 0 &\implies x^\alpha = o(e^x) & \alpha > 0 &\implies e^{-x} = o(1/x^\alpha) \end{aligned}$$

Propriété 1.4 — Prépondérants classiques en 0

$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta) \qquad \alpha > 0 \implies \ln(x) = o(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.5 — Calcul avec des o

- (transitivité) si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$;
- si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$;
- si $f = o(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\alpha f = o(g)$;
- si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Exemple

- On peut donc écrire par exemple, au voisinage de 0, $x + 2x^2 + 4x^3 = x + o(x)$
- Ce qui permet de calculer quelques limites, en généralisant la méthode vue en terminale. En $+\infty$: $\frac{3x^5 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{3x^5 + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3x^3 + o(x^2)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- l'idée est « d'arrondir » la fonction à son plus grand terme, et de poursuivre ensuite le calcul. Ainsi, toujours en $+\infty$, $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + o(e^x)}{e^x + o(e^x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

II — Équivalence

Définition 2.1 — On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

Dans ces conditions, on note « $f \sim g$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou plus simplement (lorsque le contexte est clair) $f \sim g$.

Remarque I.1 Il est nécessaire dans cette définition que $1/g$ soit définie au voisinage de x_0 . En particulier, il est impossible d'avoir $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$!

Propriété 2.2 — Au voisinage de x_0 , $f = g + o(g) \iff f \sim g$.

Exemple

- Au voisinage de 0, $\sin x/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, ce qui s'écrit $\sin x \underset{0}{\sim} x$ ou encore $\sin x = x + o(x)$. On verra tout l'intérêt de cette écriture.
- équivalent de $e^x - 1$ en 0
- Équivalent de $x^4 + x^2 - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2.4 — Calcul avec des équivalents

Au voisinage d'un point x_0 :

- 1) si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$;
- 2) si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;

- 3) si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ (sous réserve d'existence);
 4) si $f \sim g$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0 .

Proposition 2.5 — Si $f \sim g$ et si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ (la limite 1 peut être infinie).

DÉM. Aisée. □

Attention, la réciproque est fautive ! Par exemple e^x et x ont la même limite en $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.

La notion d'équivalents est plus fine que la notion de limite : elle permet de classer les fonctions ayant la même limite en différentes catégories.

Théorème 2.6 — Approximation affine d'une fonction

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim af'(a)(x - a) \iff f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

DÉM. □

On en tire les équivalents classiques, qui peuvent s'écrire sous deux formes

$$\begin{aligned} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \sin x = x + o(x) \\ \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \tan x = x + o(x) \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \ln(1+x) = x + o(x) \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff e^x - 1 = x + o(x) \\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x &\iff (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, de la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on tire $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(x/2)$ et donc

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Une fonction peut avoir plusieurs équivalents au voisinage d'un point. Pour cela on essaiera toujours de trouver l'équivalent le plus simple, comme un équivalent en x^n .

Dernière remarque : il n'est pas correct d'écrire, par exemple, $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x + x^2$. C'est formellement exact, mais c'est une précision inutile car seule l'infiniment grand dominant

est pertinent. Ici que signifie $\sin x = x + x^2 + o(x + x^2)$, sinon $\sin x = x + x^2 + o(x)$, ce qui est inutilement compliqué.

Addition on ne peut pas faire d'addition d'équivalents.

Exemple

- équivalent de $e^x - 1$, $e^{-x} - 1$ et $e^{-x} - e^x$ en 0 ?
- limite de $\frac{\sin x - \tan x}{x}$ en 0 ?

On voit tout l'intérêt de préférer les o , qui amène à manipuler une inégalité.

Composition

En toute généralité, on ne peut pas composer librement fonctions et équivalents.

Exemple

- équivalence de $x + x^2$ et x^2 en $+\infty$? équivalence de $\exp(x + x^2)$ et $\exp(x^2)$ en $+\infty$?
- Toutefois, les changements de variables sont possibles. Dans le cas de $X = x^n$ ou de $X = \lambda x$, on reste dans un domaine connu.

Exemple

- Équivalent de $\sin(x^5)$ en 0 :
- Équivalent de $\tan(3x)$ en 0 :

Et parfois, ben, il faut se forcer

Exemple

- Équivalent de $\sin(\tan(e^x - 1))$ en 0 :

