

# Comparaison de fonction

BCPST I — 14 septembre 2017

Ce chapitre est consacré aux principales méthodes de calcul « manuelles » des limites.

Dans toute cette partie,  $\mathcal{D}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  est un point ou une borne (éventuellement infinie) de  $\mathcal{D}$  et  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que le problème de la définition des fonctions a été étudié au préalable, et on ne se s'intéresse qu'au calcul de limite proprement dit. Mais il n'est pas interdit de vérifier mentalement l'existence des expressions !

## I — Négligeabilité

**Définition 1.1** — On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $x_0$  si et seulement si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .

Dans ces conditions, on note «  $f = o(g)$  au voisinage de  $x_0$  », ou bien  $f = o_{x_0}(g)$ , ou simplement (lorsque le contexte est clair)  $f = o(g)$ .

### Exemple

- Au voisinage de 0,  $x^2 = o(x)$ , tandis qu'au voisinage de  $+\infty$ ,  $x = o(x^2)$ ... d'où l'importance du point de référence !
- Au voisinage de  $+\infty$ ,  $x/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $x = o(e^x)$ . De même  $\ln(x) = o(x)$ .

Ces résultats se généralisent.

### Propriété 1.3 — Prépondérants classiques en $+\infty$

$$\alpha < \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta)$$

$$\alpha > 0 \implies x^\alpha = o(e^x)$$

$$\alpha > 0 \implies \ln(x) = o(x^\alpha)$$

$$\alpha > 0 \implies e^{-x} = o(1/x^\alpha)$$

**Propriété 1.4 — Prépondérants classiques en 0**

$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta) \qquad \alpha > 0 \implies \ln(x) = o(1/x^\alpha)$$

**Propriété 1.5 — Calcul avec des o**

- (transitivité) si  $f = o(g)$  et  $g = o(h)$  alors  $f = o(h)$ ;
- si  $f_1 = o(g)$  et  $f_2 = o(g)$  alors  $f_1 + f_2 = o(g)$ ;
- si  $f = o(g)$  et si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  alors  $\alpha f = o(g)$ ;
- si  $f_1 = o(g_1)$  et  $f_2 = o(g_2)$  alors  $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ .

**Exemple**

- On peut donc écrire par exemple, au voisinage de 0,  $x + 2x^2 + 4x^3 = x + o(x)$
- Ce qui permet de calculer quelques limites, en généralisant la méthode vue en terminale. En  $+\infty$  :  $\frac{3x^5 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{3x^5 + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3x^3 + o(x^2)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- l'idée est « d'arrondir » la fonction à son plus grand terme, et de poursuivre ensuite le calcul. Ainsi, toujours en  $+\infty$ ,  $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + o(e^x)}{e^x + o(e^x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

## II — Équivalence

**Définition 2.1** — On dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $x_0$  si et seulement si  $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ .

Dans ces conditions, on note «  $f \sim g$  au voisinage de  $x_0$  », ou bien  $f \underset{x_0}{\sim} g$  ou plus simplement (lorsque le contexte est clair)  $f \sim g$ .

**Remarque I.1** Il est nécessaire dans cette définition que  $1/g$  soit définie au voisinage de  $x_0$ . En particulier, il est impossible d'avoir  $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$ !

**Propriété 2.2** — Au voisinage de  $x_0$ ,  $f = g + o(g) \iff f \sim g$ .

**Exemple**

- Au voisinage de 0,  $\sin x/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , ce qui s'écrit  $\sin x \underset{0}{\sim} x$  ou encore  $\sin x = x + o(x)$ . On verra tout l'intérêt de cette écriture.

- équivalent de  $e^x - 1$  en 0
- Équivalent de  $x^4 + x^2 - 1$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Proposition 2.4 — Calcul avec des équivalents**

Au voisinage d'un point  $x_0$  :

- 1) si  $f \sim g$  et si  $g \sim h$  alors  $f \sim h$ ;
- 2) si  $f_1 \sim g_1$  et si  $f_2 \sim g_2$  alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ ;
- 3) si  $f \sim g$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors  $f^\alpha \sim g^\alpha$  (sous réserve d'existence);
- 4) si  $f \sim g$  et si  $g$  est de signe constant au voisinage de  $x_0$  alors  $f$  et  $g$  sont de même signe au voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 2.5** — Si  $f \sim g$  et si  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$  alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$  (la limite  $l$  peut être infinie).

**Dém.** Aisée. □

Attention, la réciproque est fautive ! Par exemple  $e^x$  et  $x$  ont la même limite en  $+\infty$  mais ne sont pas équivalentes.

La notion d'équivalents est plus fine que la notion de limite : elle permet de classer les fonctions ayant la même limite en différentes catégories.

**Théorème 2.6 — Approximation affine d'une fonction**

Si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $f'(a) \neq 0$ , alors

$$f(x) - f(a) \sim af'(a)(x - a)$$

$$\iff f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

**Dém.** □

On en tire les équivalents classiques, qui peuvent s'écrire sous deux formes

$$\begin{aligned} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \sin x = x + o(x) \\ \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \tan x = x + o(x) \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff \ln(1+x) = x + o(x) \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x &\iff e^x - 1 = x + o(x) \\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x &\iff \\ &(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, de la formule  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ , on tire  $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(x/2)$  et donc

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Une fonction peut avoir plusieurs équivalents au voisinage d'un point. Pour cela on essaiera toujours de trouver l'équivalent le plus simple, comme un équivalent en  $x^n$ .

Dernière remarque : il n'est pas correct d'écrire, par exemple,  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x + x^2$ . C'est formellement exact, mais c'est une précision inutile car seule l'infiniment grand dominant est pertinent. Ici que signifie  $\sin x = x + x^2 + o(x + x^2)$ , sinon  $\sin x = x + x^2 + o(x)$ , ce qui est inutilement compliqué.

**Addition** on ne peut pas faire d'addition d'équivalents.

#### Exemple

- équivalent de  $e^x - 1$ ,  $e^{-x} - 1$  et  $e^{-x} - e^x$  en 0 ?
- limite de  $\frac{\sin x - \tan x}{x}$  en 0 ?

On voit tout l'intérêt de préférer les  $o$ , qui amène à manipuler une inégalité.

#### Composition

En toute généralité, on ne peut pas composer librement fonctions et équivalents.

#### Exemple

- équivalence de  $x + x^2$  et  $x^2$  en  $+\infty$  ? équivalence de  $\exp(x + x^2)$  et  $\exp(x^2)$  en  $+\infty$  ?

Toutefois, les changements de variables sont possibles. Dans le cas de  $X = x^n$  ou de  $X = \lambda x$ , on reste dans un domaine connu.

#### Exemple

- Équivalent de  $\sin(x^5)$  en 0 :
- Équivalent de  $\tan(3x)$  en 0 :

Et parfois, ben, il faut se forcer

#### Exemple

- Équivalent de  $\sin(\tan(e^x - 1))$  en 0 :