Comparaison de fonction

BCPST I — 24 octobre 2017

Ce chapitre est consacré aux principales méthodes de calcul « manuelles » des limites.

Dans toute cette partie, $\mathscr{D}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 est un point ou une borne (éventuellement infinie) de $\mathscr{D}$ et f et g sont deux fonctions de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que le problème de la définition des fonctions a été étudié au préalable, et on ne se s'intéresse qu'au calcul de limite proprement dit. Mais il n'est pas interdit de vérifier mentalement l'existence des expressions !

I — Négligeabilité

Définition 1.1 — *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Dans ces conditions, on note « $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$, ou simplement (lorsque le contexte est clair) $f = \mathrm{o}(g)$.

Exemple

- Au voisinage de 0, $x^2 = \mathrm{o}(x)$, tandis qu'au voisinage de $+\infty$, $x = \mathrm{o}(x^2)$... d'où l'importance du point de référence !
- Au voisinage de $+\infty$, $x/\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $x = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$. De même $\ln(x) = \mathrm{o}(x)$.

Ces résultats se généralisent.

Propriété 1.3 — Prépondérants classiques en $+\infty$

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta) \qquad \alpha > 0 \Longrightarrow \ln(x) = \mathrm{o}(x^\alpha)$$
$$\alpha > 0 \Longrightarrow x^\alpha = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x) \qquad \alpha > 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{o}(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.4 — Prépondérants classiques en 0

$$\alpha > \beta \Longleftrightarrow x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta) \qquad\qquad \alpha > 0 \Longrightarrow ln(x) = \mathrm{o}(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.5 — Calcul avec des o

- *(transitivité) si* $f = \mathrm{o}(g)$ *et* $g = \mathrm{o}(h)$ *alors* $f = \mathrm{o}(h)$*;*
- *si* $f_1 = \mathrm{o}(g)$ *et* $f_2 = \mathrm{o}(g)$ *alors* $f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g)$*;*
- *si* $f = \mathrm{o}(g)$ *et si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *alors* $\alpha f = \mathrm{o}(g)$*;*
- *si* $f_1 = \mathrm{o}(g_2)$ *et* $f_2 = \mathrm{o}(g_2)$ *alors* $f_1 f_2 = \mathrm{o}(g_1 g_2)$.

Exemple

– On peut donc écrire par exemple, au voisinage de 0, $x + 2x^2 + 4x^3 = x + \mathrm{o}(x)$

– Ce qui permet de calculer quelques limites, en généralisant la méthode vue en terminale. En $+\infty$: $\dfrac{3x^5 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{3x^5 + \mathrm{o}(x^4)}{x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = \dfrac{3x^3 + \mathrm{o}(x^2)}{1 + \mathrm{o}(1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

– l'idée est « d'arrondir » la fonction a son plus grand terme, et de poursuivre ensuite le calcul. Ainsi, toujours en $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{o}(e^x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

II — Équivalence

Définition 2.1 — *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si* $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.

Dans ces conditions, on note « $f \sim g$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou plus simplement (lorsque le contexte est clair) $f \sim g$.

Remarque I.1 Il est nécessaire dans cette définition que $1/g$ soit définie au voisinage de x_0. En particulier, il est impossible d'avoir $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$!

Propriété 2.2 — *Au voisinage de x_0, $f = g + \mathrm{o}(g) \iff f \sim g$.*

Exemple

– Au voisinage de 0, $\sin x / x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, ce qui s'écrit $\sin x \underset{0}{\sim} x$ ou encore $\sin x = x + \mathrm{o}(x)$. On verra tout l'intérêt de cette écriture.

- équivalent de $e^x - 1$ en 0
- Équivalent de $x^4 + x^2 - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2.4 — Calcul avec des équivalents

Au voisinage d'un point x_0 :

1) *si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$;*
2) *si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;*
3) *si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ (sous réserve d'existence);*
4) *si $f \sim g$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.*

Proposition 2.5 — *Si $f \sim g$ et si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ (la limite l peut être infinie).*

Dém. Aisée. □

Attention, la réciproque est fausse ! Par exemple e^x et x ont la même limite en $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.

La notion d'équivalents est plus fine que la notion de limite : elle permet de classer les fonctions ayant la même limite en différentes catégories.

Théorème 2.6 — Approximation affine d'une fonction

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x-a) \iff f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Dém. □

On en tire les équivalents classiques, qui peuvent s'écrire sous deux formes

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x &\iff& \sin x = x + o(x)\\
\tan x &\underset{x\to 0}{\sim} x &\iff& \tan x = x + o(x)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{\sim} x &\iff& \ln(1+x) = x + o(x)\\
e^x - 1 &\underset{x\to 0}{\sim} x &\iff& e^x - 1 = x + o(x)\\
(1+x)^\alpha - 1 &\underset{x\to 0}{\sim} \alpha x &\iff& (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, de la formule $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$, on tire $\cos(x)-1 = -2\sin^2(x/2)$ et donc

$$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Une fonction peut avoir plusieurs équivalents au voisinage d'un point. Pour cela on essaiera toujours de trouver l'équivalent le plus simple, comme un équivalent en x^n.

Dernière remarque : il n'est pas correct d'écrire, par exemple, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x+x^2$. C'est formellement exact, mais c'est une précision inutile car seule l'infiniment grand dominant est pertinent. Ici que signifie $\sin x = x+x^2+\mathrm{o}(x+x^2)$, sinon $\sin x = x+x^2+\mathrm{o}(x)$, ce qui est inutilement compliqué.

Addition on ne peut pas faire d'addition d'équivalents.

Exemple

- équivalent de e^x-1, $\mathrm{e}^{-x}-1$ et $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x$ en 0 ?
- limite de $\dfrac{\sin x - \tan x}{x}$ en 0 ?

On voit tout l'intérêt de préférer les o, qui amène à manipuler une inégalité.

Composition

En toute généralité, on ne peut pas composer librement fonctions et équivalents.

Exemple

- équivalence de $x+x^2$ et x^2 en $+\infty$? équivalence de $\exp(x+x^2)$ et $\exp(x^2)$ en $+\infty$?

Toutefois, les changements de variables sont possibles. Dans le cas de $X = x^n$ ou de $X = \lambda x$, on reste dans un domaine connu.

Exemple

- Équivalent de $\sin(x^5)$ en 0 :
- Équivalent de $\tan(3x)$ en 0 :

Et parfois, ben, il faut se forcer

Exemple

- Équivalent de $\sin(\tan(\mathrm{e}^x-1))$ en 0 :