

APPLICATIONS

BCPST I, 27/03/2018

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, E et F sont deux ensembles non vides.

I — Définition

Définition 1.1 — Application de E dans F

On appelle *application* la donnée

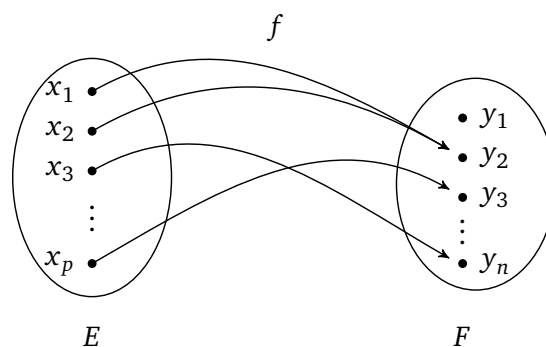
- de deux ensembles non vides E et F ;
- d'un sous-ensemble Γ de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \exists! y \in F, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

L'ensemble E s'appelle **l'ensemble de départ**, l'ensemble F **l'ensemble d'arrivée** et Γ **le graphe** de l'application.

Concrètement une application f de E dans F est une façon d'associer à *chaque* élément de E un *unique* élément de F .

Si on appelle f l'application et si $x \in E$ alors l'unique élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ est noté $f(x)$. On peut alors noter f indifféremment $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ ou $f : E \longrightarrow F$.



La façon de faire cette association n'est pas l'élément essentiel de la définition d'une application : les ensembles de départ et d'arrivée sont également très importants pour raisonner.

Quelques exemples vont nous permettre d'explicitier les difficultés de cette définition.

Exemple

- Le graphe ci-dessous ne définit pas une application. En effet, un élément de \mathbb{R} ne peut avoir plusieurs images par une application.

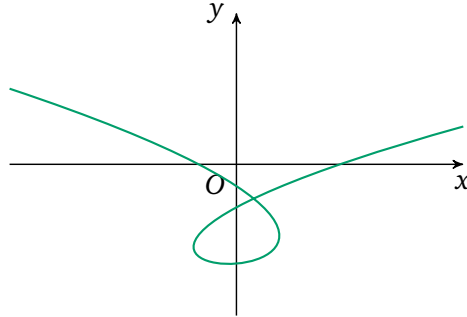
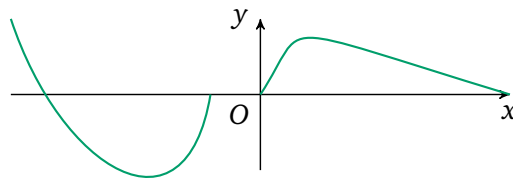


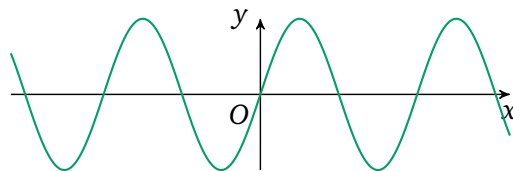
FIGURE I.1 — Courbe qui n'est le graphe d'aucune fonction.

- Le graphe ci-contre ne définit pas non plus une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En effet, certains éléments de \mathbb{R} n'ont pas d'image.

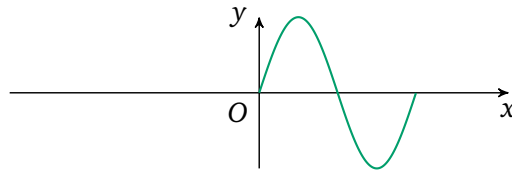
FIGURE I.2 — Courbe qui n'est pas le graphe d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Notez que cette fonction n'est pas définie de façon constructive : comment calculer $\sin(4)$ à partir de cette définition ?

FIGURE I.3 — Graphe de f_1

- $f_2 : \begin{cases} [0 ; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{cases}$ est une application de $[0 ; 2\pi]$ dans \mathbb{R} . Son graphe est représenté figure 1.2. Elle est différente de f_1 car elle n'ont pas le même ensemble de départ.

FIGURE I.4 — Graphe de f_2

On peut dire de f_2 que c'est la restriction de f à l'ensemble $[0 ; \pi/2]$.

- L'application $f_3 : \begin{cases} [0 ; 2\pi] \longrightarrow [-1 ; 1] \\ x \longmapsto \sin x \end{cases}$ est une application de $[0 ; 2\pi]$ dans $[-1 ; 1]$.

Sa courbe représentative est la même que celle de f_2 . Elle est pourtant différente de f_2 puisqu'elle n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

Notation L'ensemble des applications de E dans F est souvent noté F^E , ou encore $\mathcal{F}(E, F)$.

Parmi les applications classiques, mentionnons

- Si E et F sont deux ensembles et si $a \in F$, alors $f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto a \end{cases}$ est une application

constante de E dans F .

- Les fonctions de la forme $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{cases}$, où a et b sont deux paramètres réels,

s'appellent des **applications affines**.

- Si E est un ensemble, alors $f : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ s'appelle **l'identité sur E** et se note Id_E .

Définition 1.3 — Égalité entre deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et si

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

II — Image, antécédent

Définition 2.1 — Image d'un élément de E , antécédent d'un élément de F

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$, $x \in E$ et $y \in F$.

Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x et que x est un antécédent de y .

Dans un cas l'article est défini, pas dans l'autre : tout élément de E a une unique image, mais un élément de F peut ne pas avoir d'antécédents, en avoir plusieurs ou un seul.

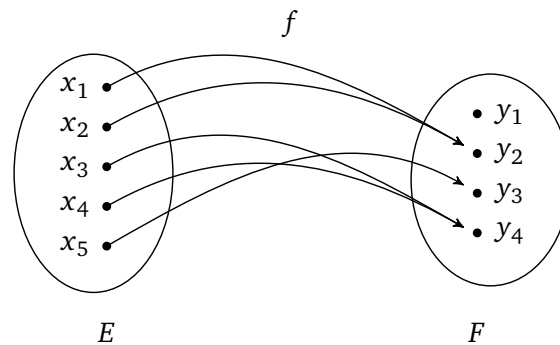


FIGURE I.5 — Cette figure définit bien une fonction car chaque x_i à une image. L'élément y_1 n'a pas d'antécédents, et y_2 en a deux.

Définition 2.2 — Image d'un sous-ensemble de E

Soit E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E .

On appelle *image* de A et on note $f(A)$ l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \text{ avec } x \in A\}$$

(c'est un sous-ensemble de F).

Sur le dessin précédente, $f(E) = \{y_2, y_3, y_4\}$, ou encore $f(\{x_2, x_5\}) = \{y_2, y_4\}$.

Pour les fonctions numériques continues, les images et images réciproques d'ensemble se lisent sur le tableau de variation

Exemple Considérons la fonction \exp .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
\exp			$+\infty$
		0	

Pour une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle. Donc $\exp \langle [0 ; 1] \rangle = [1 ; e]$.

Définition 2.4 — Image réciproque d'un sous-ensemble de F

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, B un sous-ensemble de F .

On appelle *image réciproque* de B et on note $f^{-1} \langle B \rangle$ l'ensemble

$$f^{-1} \langle B \rangle = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

(c'est un sous-ensemble de E).

Exercice 1 Trouver, à partir du schéma précédent, $f^{-1} \langle \{y_1\} \rangle$, $f^{-1} \langle \{y_2, y_3\} \rangle$.

Déterminer l'image réciproque d'un intervalle passe souvent dans \mathbb{R} par la résolution d'une inéquation.

Exercice 2 Trouver l'image réciproque de $[0 ; 1]$ par l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $x \longmapsto x^2 - 2x$

L'exercice suivant permet d'établir les propriétés des images et images réciproques vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Exercice 3 Soit $f : E \longrightarrow F$, A et B deux sous-ensembles de E et C et D deux sous-ensembles de F .

1. Montrer que
 - a) $f^{-1} \langle C \cup D \rangle = f^{-1} \langle C \rangle \cup f^{-1} \langle D \rangle$;
 - b) $f^{-1} \langle C \cap D \rangle = f^{-1} \langle C \rangle \cap f^{-1} \langle D \rangle$;
 - c) $f \langle A \cup B \rangle = f \langle A \rangle \cup f \langle B \rangle$;
 - d) $f \langle A \cap B \rangle \subset f \langle A \rangle \cap f \langle B \rangle$.
2. Montrer que l'assertion suivante est fausse : $f \langle A \cap B \rangle = f \langle A \rangle \cap f \langle B \rangle$.
3. A-t-on $\mathbb{C}_F (f \langle A \rangle) \subset f (\mathbb{C}_E A)$? A-t-on $f (\mathbb{C}_E A) \subset \mathbb{C}_E (f \langle A \rangle)$?

III — Injection, surjection, bijection

Définition 3.1 — Injectivité

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est *injective* si deux éléments distincts de E n'ont pas la même image

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

ou encore, par contraposée,

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

On dit aussi que f est une *injection* ou que f est une *fonction injective*.

L'injectivité est une propriété de la fonction et de l'ensemble de départ, mais pas de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.2 — Surjectivité

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est *surjective* si tous les éléments de F ont un antécédent dans E

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

ce qui s'écrit aussi $f(E) = F$

On dit aussi que f est une *surjection* ou que f est une *fonction surjective*.

La surjectivité est une propriété de la fonction, de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.3 — Bijection de E dans F

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

L'application f est *bijjective* si et seulement si elle est à la fois injective et surjective

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y$$

IV — Ensembles de départ et d'arrivée

Définition 4.1 — Application induite

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ et B est un sous-ensemble de F qui contient $f(E)$. Alors f définit naturellement une application de E dans B

$$: \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

Cette application, qui est différente de f , est dite **induite** par f sur B .

Exemple avec f_1, f_2 et f_3 ci-dessus.

Définition 4.2 — Restriction

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, A un sous-ensemble de E .

L'application de A dans F définie par

$$: \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

est la **restriction** de f à A . On la note f_A .

L'intérêt de la restriction est de pouvoir munir f de propriétés supplémentaires : être non nulle, être positive, etc. Par exemple $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur \mathbb{R} , mais elle l'est sur \mathbb{R}_+ .

Définition 4.3 — Prolongement

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et A un sous-ensemble de E .

Toute fonction g définie de E dans F , telle que $g_A = f$ est un **prolongement** de f sur E .

Dans l'exemple précédent, f_2 est la restriction de f_1 à $[0 ; 2\pi]$. Réciproquement f_1 est un prolongement de f_2 à \mathbb{R} . Remarquez qu'il peut y avoir plusieurs prolongements de f_2 . L'intérêt du prolongement est d'étendre une fonction bien connue sur un domaine : extrapolation (en dehors d'un domaine), interpolation (entre deux points), etc.

V — Composée

Définition 5.1 — Composée de deux fonctions

Soit E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.

On appelle *composée de f et de g* la fonction $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Exemple

– La fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(2x + 1) \end{cases}$ peut être vue comme la composée des fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 1 \end{cases} \quad \text{et de } g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(x) \end{cases}.$$

Avec ces notations, $g \circ f$ est...

– Proposez de même une ou plusieurs décompositions de la fonction $x \mapsto x\sqrt{x^2 + 1}$ (étudier au préalable son domaine de définition).

Un point important est que l'ensemble d'arrivée de f et l'ensemble de départ de g doivent être identiques. C'est cette condition qui permet de trouver les ensembles de définition d'expressions algébriques.

Exemple Déterminons le domaine de définition de l'expression $\sqrt{x^2 - 4}$.

On peut décomposer cette expression comme composée de deux fonctions

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 4 \end{cases}$$

Mais avec de telles fonctions, la composition est impossible. Il faut utiliser à la place de f une autre fonction h , avec la même expression algébrique, et dont l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R}_+ . L'ensemble de départ le plus grand possible est $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

On le calcule et on définit ensuite correctement $g \circ h$ sur l'ensemble $\mathbb{R}]-2 ; 2[$.

Exercice 4 La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x^2 + 1) \end{cases} \quad \text{est la composée des applications...}$$

Propriété 5.4 — Associativité de la composée

Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre ensembles non vides et $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2, f_2 : E_2 \longrightarrow E_3, f_3 : E_3 \longrightarrow E_4$.

La composée de fonctions est associative :

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Notez que la composée $f \circ g$ peut ne pas avoir de sens, ainsi la composée n'est généralement pas commutative.

Propriété 5.5 — Élément neutre pour la composition

Soit E un ensemble non vide.

La composée de fonctions de E dans E est une opération interne de E^E qui admet un élément neutre, la fonction Id_E définie par

$$Id_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

Ainsi $\forall f \in E^E, \quad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

Théorème 5.6 — Caractérisation de la bijection

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F .

L'application f est *bijjective* si et seulement si il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Dans ce cas cette application g est est *bijjective*. On l'appelle la *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1} .

DÉM. Sens direct très simple en pensant que $x = f^{-1}(y)$. Sens réciproque en exhibant f^{-1} .

Puis prouver que g est unique. □

Ce théorème permet de comprendre tout l'intérêt de la notion de bijection. Si une application f représente une opération sur un ensemble (genre « extraction d'une racine carrée », « inverse », etc.) la bijection signifie qu'on peut « revenir en arrière » dans le calcul. L'ensemble d'arrivée représente alors la condition nécessaire et suffisante pour ce retour en arrière.

Propriété 5.7 — Composée de deux bijections

La composée de deux bijections f_1 et f_2 est une bijection, et de plus $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

DÉM. On applique la définition à $f = f_2 \circ f_1$ en prenant $g = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$. □

Théorème 5.8 — Cas des fonctions numériques

Soit f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Alors f est injective. Elle réalise donc une bijection de I dans $f \langle I \rangle$. Sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f .

Leurs graphes dans un repère orthonormé se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

DÉM. On suppose, sans perte de généralité, que f strictement croissante.

Montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in I^2$ tels que $x \neq x'$. Si $x < x'$, d'après la stricte croissance de f on a $f(x) < f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$.

Si $x > x'$, de même. Donc $f(x) \neq f(x')$ et f est donc injective.

Soit $f : I \rightarrow f \langle I \rangle$ l'application induite par f . Cette application est toujours injective. Elle est surjective puisque $f \langle I \rangle$ est son ensemble d'arrivée. Elle est donc bijective.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soit $(y, y') \in (f \langle I \rangle)^2$ avec $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Si $x \geq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$ et donc $y \geq y'$, ce qui est faux. On a donc démontré par l'absurde que $x < x'$, ce qui prouve le résultat. □

Nous verrons de plus que si f est continue alors f^{-1} l'est également (théorème de la bijection continue). Enfin nous verrons que si f est dérivable et que f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable.

