Applications

BCPST 1, 26/09/2018

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, E et F sont deux ensembles non vides.*

I — Définition

Définition 1.1 — Application de E dans F

On appelle application la donnée

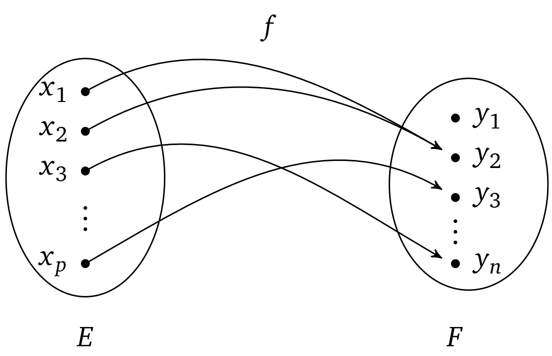
- *de deux ensembles non vides E et F ;*
- *d'un sous-ensemble Γ de $E \times F$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad \exists! y \in F, \qquad (x, y) \in \Gamma.$$

L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ, l'ensemble F l'ensemble d'arrivée et Γ le graphe de l'application.

Concrètement une application f de E dans F est une façon d'associer à *chaque* élément de E *un unique* élément de F.

Si on appelle f l'application et si $x \in E$ alors l'unique élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ est noté $f(x)$. On peut alors noter f indifféremment $f : \left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$ ou $f : E \longrightarrow F$.



La façon de faire cette association n'est pas l'élément essentiel de la définition d'une application : les ensembles de départ et d'arrivée sont également très importants pour raisonner.

Quelques exemples vont nous permettre d'expliciter les difficultés de cette définition.

Exemple

– Le graphe ci-dessous ne définit pas une application. En effet, un élément de $\mathbb{R}$ ne peut avoir plusieurs images par une application.

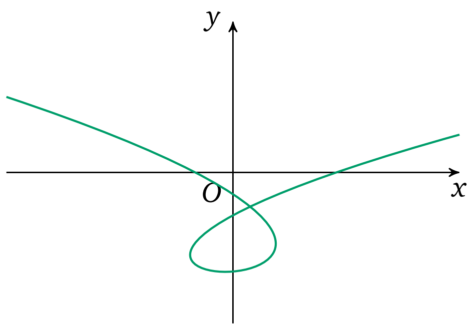


FIGURE I.1 — *Courbe qui n'est le graphe d'aucune fonction.*

– Le graphe ci-contre ne définit pas non plus une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, certains éléments de $\mathbb{R}$ n'ont pas d'image.

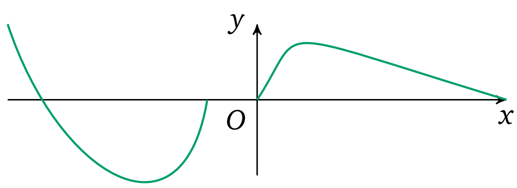


FIGURE I.2 — *Courbe qui n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

– $f_1 \; : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Notez que cette fonction n'est pas définie de façon constructive : comment calculer $\sin(4)$ à partir de cette définition ?

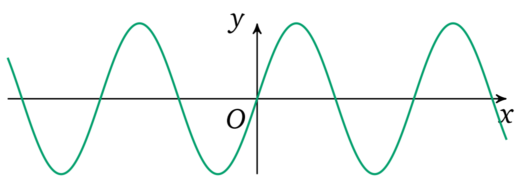


FIGURE I.3 — *Graphe de f_1*

- $f_2 : \left|\begin{array}{rcl} [0\,;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ est une application de $[0\,;2\pi]$ dans $\mathbb{R}$. Son graphe est représenté figure 1.2. Elle est différente de f_1 car elle n'ont pas le même ensemble de départ.

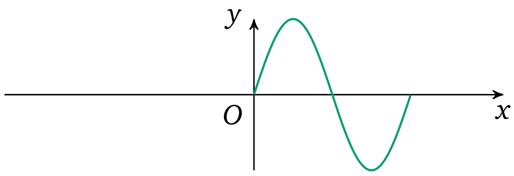


FIGURE I.4 — *Graphe de f_2*

On peut dire de f_2 que c'est *la* restriction de f à l'ensemble $[\,0\,;\pi/2\,]$.

- L'application $f_3 : \left|\begin{array}{rcl} [0\,;2\pi] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ est une application de $[0\,;2\pi]$ dans $[-1\,;1]$.
  Sa courbe représentative est la même que celle de f_2. Elle est pourtant différente de f_2 puisqu'elle n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

Notation L'ensemble des applications de E dans F est souvent noté F^E, ou encore $\mathscr{F}(E,F)$.

Parmi les applications classiques, mentionnons

- Si E et F sont deux ensembles et si $a \in F$, alors $f : \left|\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & a \end{array}\right.$ est une application constante de E dans F.
- Les fonctions de la forme $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}\right.$, où a et b sont deux paramètres réels, s'appellent des applications affines.
- Si E est un ensemble, alors $f : \left|\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ s'appelle l'identité sur E et se note Id_E.

Définition 1.3 — Égalité entre deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x)$$

II — Image, antécédent

Définition 2.1 — Image d'un élément de E, antécédent d'un élément de F
Soit E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $x \in E$ et $y \in F$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x et que x est un antécédent de y.

Dans un cas l'article est défini, pas dans l'autre : *tout* élément de E a *une unique* image, mais un élément de F peut ne pas avoir d'antécédents, en avoir plusieurs ou un seul.

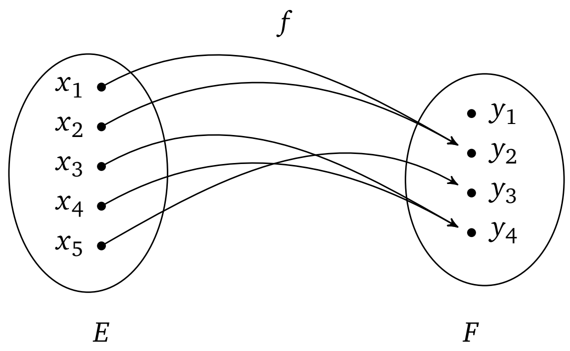


FIGURE I.5 — *Cette figure définit bien une fonction car chaque x_i à une image. L'élément y_1 n'a pas d'antécédents, et y_2 en a deux.*

Définition 2.2 — Image d'un sous-ensemble de E
Soit E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E.
On appelle image *de A et on note $f\langle A\rangle$ l'ensemble*

$$f\langle A\rangle = \{f(x) \ \text{ avec } \ x \in A\}$$

(c'est un sous-ensemble de F).

Sur le dessin précédente, $f\langle E\rangle = \left\{y_2, y_3, y_4\right\}$, ou encore $f\langle\{x_2, x_5\}\rangle = \left\{y_2, y_4\right\}$.
Pour les fonctions numériques continues, les images et images réciproques d'ensemble se lisent sur le tableau de variation

Exemple Considérons la fonction exp.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$			$+$		
					$+\infty$
				$\nearrow$	
$\exp$			1		
		$\nearrow$			
	0				

Pour une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle. Donc $\exp\langle [\,0\,;1\,] \rangle = [\,1\,;\mathrm{e}\,]$.

Définition 2.4 — Image réciproque d'un sous-ensemble de F
Soit E et F deux ensembles non vides, $f\ :\ E \longrightarrow F$, B un sous-ensemble de F.
On appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}\langle B \rangle$ l'ensemble

$$f^{-1}\langle B \rangle = \{x \in E \ \textit{ tel que }\ f(x) \in B\}$$

(c'est un sous-ensemble de E).

Exercice 1 Trouver, à partir du schéma précédent, $f^{-1}\langle\{y_1\}\rangle$, $f^{-1}\langle\{y_2, y_3\}\rangle$.

Déterminer l'image réciproque d'un intervalle passe souvent dans $\mathbb{R}$ par la résolution d'une inéquation.

Exercice 2 Trouver l'image réciproque de $[\,0\,;1\,]$ par l'application $f\ :\ \left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-2x\end{array}\right.$.

L'exercice suivant permet d'établir les propriétés des images et images réciproques vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Exercice 3 Soit $f\ :\ E \longrightarrow F$, A et B deux sous-ensembles de E et C et D deux sous-ensembles de F.

1. Montrer que
   a) $f^{-1}\langle C \cup D \rangle = f^{-1}\langle C \rangle \cup f^{-1}\langle D \rangle$;
   b) $f^{-1}\langle C \cap D \rangle = f^{-1}\langle C \rangle \cap f^{-1}\langle D \rangle$;
   c) $f\langle A \cup B \rangle = f\langle A \rangle \cup f\langle B \rangle$;
   d) $f\langle A \cap B \rangle \subset f\langle A \rangle \cap f\langle B \rangle$.
2. Montrer que l'assertion suivante est fausse : $f\langle A \cap B \rangle = f\langle A \rangle \cap f\langle B \rangle$.
3. A-t-on $\complement_F (f\langle A \rangle) \subset f\left(\complement_E A\right)$? A-t-on $f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_E (f\langle A \rangle)$?

III — Injection, surjection, bijection

Définition 3.1 — Injectivité
Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est injective si deux éléments distincts de E n'ont pas la même image

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

ou encore, par contraposée,

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \qquad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

On dit aussi que f est une injection ou que f est une fonction injective.

L'injectivité est une propriété de la fonction et de l'ensemble de départ, mais pas de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.2 — Surjectivité
Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est surjective si tous les éléments de F ont un antécédent dans E

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \qquad f(x) = y$$

ce qui s'écrit aussi $f\langle E\rangle = F$
On dit aussi que f est une surjection ou que f est une fonction surjective.

La surjectivité est une propriété de la fonction, de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.3 — Bijection de E dans F
Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.
L'application f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \qquad f(x) = y$$

IV — Ensembles de départ et d'arrivée

Définition 4.1 — Application induite
Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ et B est un sous-ensemble de F qui contient $f\langle E\rangle$. Alors f définit naturellement une application de E dans B

$$: \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

Cette application, qui est différente de f, est dite induite par f sur B.

Exemple avec f_1, f_2 et f_3 ci-dessus.

Définition 4.2 — Restriction
Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, A un sous-ensemble de E.
L'application de A dans F définie par

$$: \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

est la restriction de f à A. On la note f_A.

L'intérêt de la restriction est de pouvoir munir f de propriétés supplémentaires : être non nulle, être positive, etc. Par exemple $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 4.3 — Prolongement
Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et A un sous-ensemble de E.
Toute fonction g définie de E dans F, telle que $g_A = f$ est un prolongement de f sur E.

Dans l'exemple précédent, f_2 est la restriction de f_1 a $[0\,;\,2\pi]$. Réciproquement f_1 est *un* prolongement de f_2 à $\mathbb{R}$. Remarquez qu'il peut y avoir plusieurs prolongements de f_2. L'intérêt du prolongement est d'étendre une fonction bien connue sur un domaine : extrapolation (en dehors d'un domaine), interpolation (entre deux points), etc.

V — Composée

Définition 5.1 — Composée de deux fonctions
Soit E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.
On appelle composée de f et de g la fonction $g \circ f$ définie par

$$g \circ f \; : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Exemple

– La fonction $h \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(2x+1) \end{array} \right.$ peut être vue comme la composée des fonctions $f \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array} \right.$ et de $g \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \right.$.
  Avec ces notations, $g \circ f$ est...
– Proposez de même une ou plusieurs décompositions de la fonction $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ (étudier au préalable son domaine de définition).

Un point important est que l'ensemble d'arrivée de f et l'ensemble de départ de g doivent être identiques. C'est cette condition qui permet de trouver les ensembles de définition d'expressions algébriques.

Exemple Déterminons le domaine de définition de l'expression $\sqrt{x^2-4}$.
On peut décomposer cette expression comme composée de deux fonctions

$$g \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-4 \end{array} \right.$$

Mais avec de telles fonctions, la composition est impossible. Il faut utiliser à la place de f une autre fonction h, avec la même expression algébrique, et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+$. L'ensemble de départ le plus grand possible est $f^{-1}\langle \mathbb{R}_+ \rangle$.
On le calcule et on définit ensuite correctement $g \circ h$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \,]-2\,;2[$.

Exercice 4 La fonction
$f \; : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x^2+1) \end{array} \right.$ est la composée des applications...

Propriété 5.4 — Associativité de la composée
Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre ensembles non vides et $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2$, $f_2 : E_2 \longrightarrow E_3$, $f_3 : E_3 \longrightarrow E_4$.

La composée de fonctions est associative :

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Notez que la composée $f \circ g$ peut ne pas avoir de sens, ainsi la composée n'est généralement pas commutative.

Propriété 5.5 — Élément neutre pour la composition
Soit E un ensemble non vide.
La composée de fonctions de E dans E est une opération interne de E^E qui admet un élément neutre, la fonction Id_E définie par

$$Id_E \ : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

Ainsi $$\forall f \in E^E, \qquad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$$

Théorème 5.6 — Caractérisation de la bijection
Soit E et F deux ensembles non vides et $f \ : \ E \longrightarrow F$ une application de E dans F.
L'application f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g \ : \ F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Dans ce cas cette application g est est bijective. On l'appelle la bijection réciproque de f et on la note f^{-1}.

DÉM. Sens direct très simple en pensant que $x = f^{-1}(y)$. Sens réciproque en exhibant f^{-1}.
Puis prouver que g est unique.

□

Ce théorème permet de comprendre tout l'intérêt de la notion de bijection. Si une application f représente une opération sur un ensemble (genre « extraction d'une racine carrée », « inverse », etc.) la bijection signifie qu'on peut « revenir en arrière » dans le calcul. L'ensemble d'arrivée représente alors la condition nécessaire et suffisante pour ce retour en arrière.

Propriété 5.7 — Composée de deux bijections
La composée de deux bijections f_1 et f_2 est une bijection, et de plus $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

DÉM. On applique la définition à $f = f_2 \circ f_1$ en prenant $g = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$. □

Théorème 5.8 — Cas des fonctions numériques
Soit f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors f est injective. Elle réalise donc une bijection de I dans $f\langle I\rangle$. Sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f.
Leurs graphes dans un repère orthonormé se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

DÉM. On suppose, sans perte de généralité, que f strictement croissante.
Montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in I^2$ tels que $x \neq x'$. Si $x < x'$, d'après la stricte croissance de f on a $f(x) < f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$.
Si $x > x'$, de même. Donc $f(x) \neq f(x')$ et f est donc injective.
Soit $f : I \longrightarrow f\langle I\rangle$ l'application induite par f. Cette application est toujours injective. Elle est surjective puisque $f\langle I\rangle$ est son ensemble d'arrivée. Elle est donc bijective.
Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soit $(y, y') \in (f\langle I\rangle)^2$ avec $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Si $x \geqslant x'$, alors $f(x) \geqslant f(x')$ et donc $y \geqslant y'$, ce qui est faux. On a donc démontré par l'absurde que $x < x'$, ce qui prouve le résultat.

□

Nous verrons de plus que si f est continue alors f^{-1} l'est également (théorème de la bijection continue). Enfin nous verrons que si f est dérivable et que f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable.