

Applications linéaires

BCPST I — 24 octobre 2017

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E et F sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

I — Définitions et opérations

I.1 — Définitions

Définition 1.1 — Une application f de E dans F est dite linéaire si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v);$
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

Exemple

- L'exemple le plus simple : Id_E . De même pour l'application $\lambda \text{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \lambda u \end{cases}$, où λ est un scalaire quelconque. Ces applications sont dénommées **homothéties vectorielles**.
- si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel alors $\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto 0_E \end{cases}$ est une application linéaire
- de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $E : \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{cases}$.
- de $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R} : \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f \end{cases}$;
- de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x \end{cases}$;

Remarque I.1 Si f est une application linéaire de E dans F alors $f(0_E) = 0_F$.

Vocabulaire et notations

- Une application linéaire est parfois qualifiée de **morphisme** d'espaces vectoriels.
- Si les espaces de départ et d'arrivée sont identiques ($F = E$) on parle d'**endomorphisme**.
- Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
- Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$, et celui des automorphismes $GL(E)$.

Application linéaire de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^p .

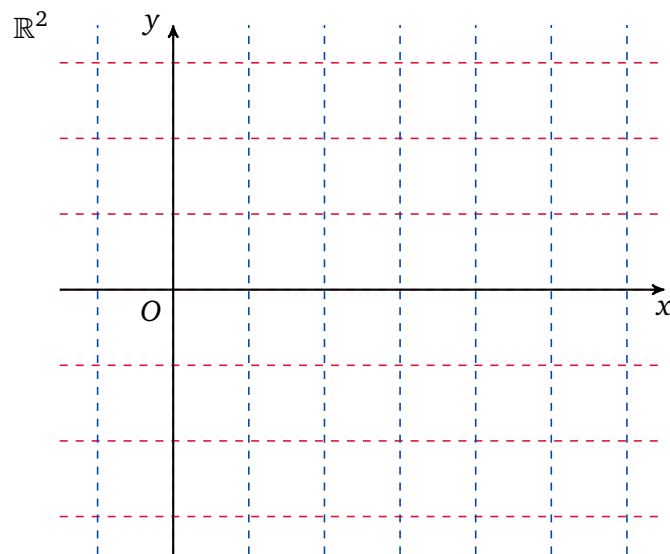
Une application de la forme

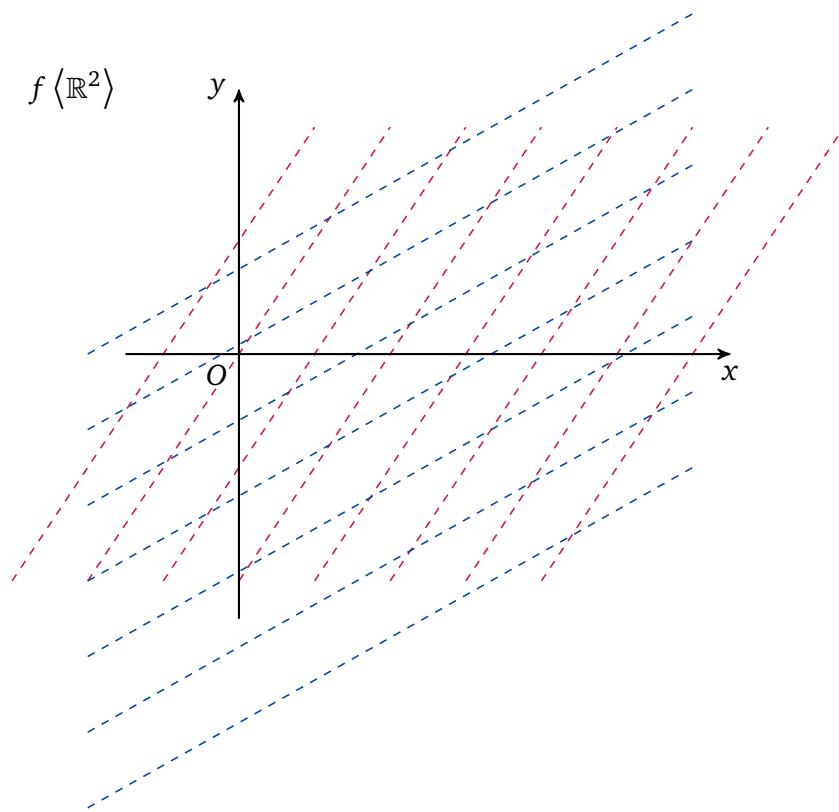
$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p) \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{n \times p}$, est réputée linéaire, de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n .

On peut ainsi représenter des application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , par exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (-x + 2y, 2x + 3y) \end{cases}.$$





I.2 — Opérations sur les applications linéaires

Propriété 1.3 — Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $f + g$ et αf sont deux applications linéaires de E dans F .

Dém. Vérifions-le pour $f + g$. Soit u et v deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}
 (f + g)(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) + g(\lambda u + v) \\
 &= \lambda f(u) + f(v) + \lambda g(u) + g(v) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } g \\
 &= \lambda(f(u) + g(u)) + (f(v) + g(v)) \\
 &= \lambda(f + g)(u) + (f + g)(v) \quad \square
 \end{aligned}$$

Théorème 1.4 — Linéarité de la bijection réciproque

Soit f une application linéaire bijective de E dans F .

La bijection réciproque f^{-1} de f est une applications linéaires de F dans E . E .

Dém. On va faire un raisonnement par équivalence.

Soit u et v deux vecteurs et λ un scalaire. On veut démontrer que

$$f^{-1}(\lambda u + v) = \lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\lambda u + v) = \lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \\ \Leftrightarrow & af(f^{-1}(\lambda u + v)) = f(\lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v)) \\ \Leftrightarrow & a\lambda u + v = \lambda f(f^{-1}(u)) + f(f^{-1}(v)) \\ & \text{par linéarité de } f \\ \Leftrightarrow & \lambda u + v = \lambda u + v \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie, la première l'est également. \square

Propriété 1.5 — Composée d'applications linéaires

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G .

Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Dém. De même que précédemment. \square

Propriété 1.6 — Distributivité de la composition sur l'addition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espace vectoriel.

1) Si f_1 et f_2 sont deux application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors

$$g \circ (f_1 + f_2) \circ g = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

2) Si g_1 et g_2 sont deux application linéaire de F dans G et f une application linéaire de E dans F alors

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Dém. La seconde propriété se démontre sans utiliser la linéarité d'aucune application. Il n'en va pas de même de la première.

En effet, soit u dans F . On a

$$g \circ (f_1 + f_2)(u) = g(f_1(u) + f_2(u)) = g(f_1(u)) + g(f_2(u))$$

par linéarité de g

d'où le résultat. \square

Cette propriété de distributivité permet d'assimiler la composition d'application linéaire à une multiplication. On verra d'ailleurs plus tard le parallèle très fort avec le produit matriciel.

Cas de $\mathcal{L}(E)$ Dans $\mathcal{L}(E)$ la composition se comporte comme une multiplication non commutative : $\mathcal{L}(E)$ est stable par la composition, associativité, élément neutre (Id_E), non commutativité, distributivité par rapport à l'addition et transitivité par rapport à la multiplication par un scalaire.

Cette analogie avec la multiplication justifie la notation suivante

Notation puissance Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (f composée n fois avec elle-même) ;
- et $f^0 = \text{Id}_E$ par convention.
- Si f est bijective, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

C'est une surcharge assez exotique de la notation puissance, à laquelle il faudra bien prendre garde.

II — Noyau, image d'une application linéaire

II.1 — Noyau

Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = 0_F$, d'inconnue $u \in E$, s'appelle le **noyau** de f . On le note $\text{Ker } f$:

$$\text{Ker } f = \{u \in E \text{ tel que } f(u) = 0_F\}$$

Propriété 2.2 — $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

Dém. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel:

- D'abord $\text{Ker } f \subset E$;
- ensuite $f(0_E) = 0_F$, donc 0_E est dans $\text{Ker } f$, et donc $\text{Ker } f$ n'est pas vide ;
- soit u et v deux vecteurs de $\text{Ker } f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= \lambda 0_F + 0_F = 0_F \end{aligned}$$

donc $\lambda u + v \in \text{Ker } f$. □

Théorème 2.3 — Injectivité et noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Dém. Supposons d'abord que f est injective. Soit $u \in \text{Ker } f$. Comme $f(u) = f(0_E) = 0_F$ et que f est injective, nécessairement $u = 0_E$. Ainsi $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Réciproque : supposons que $\text{Ker } f = \text{zev}$. Dans ce cas, soit u et u' deux éléments de E ayant la même image par f :

$$f(u) = f(u') \iff f(u) - f(u') = 0_F \iff f(u - u') = 0_F$$

Ainsi $u - u' \in \text{Ker } f$. Comme $\text{Ker } f$ est réduit au vecteur nul, $u - u' = 0_E$, donc $u = u'$. Cela prouve que f est injective. □

Exemple Noyaux de l'application dérivée, d'une application linéaire de \mathbb{R}^2 , de \mathbb{R}^3 .

II.2 — Image

Théorème 2.5 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire

Soit f est une application linéaire de E dans F . Alors pour tout sev G de E , l'ensemble $f \langle G \rangle$ est un sous-espace vectoriel de F .

Dém. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel. □

Définition 2.6 — Image d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'ensemble $f \langle E \rangle$ s'appelle l'image de f . On le note $\text{Im } f$.

Théorème 2.7 — Image et surjectivité

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$

Dém. C'est une trivialité. □

Exemple Exemple de l'image de la dérivation restreinte à $\mathbb{K}[X]$, à $\mathbb{K}_2[X]$, de l'image d'une application linéaire de \mathbb{R}^2 .

| **Exemple** Exemple complet : les homothéties.

III — Applications linéaires en dimension finie

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à p .

III.1 — Caractérisation d'une application linéaire en dimension finie

Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie p .

Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E .

Dém. Précisons l'énoncé de ce théorème. Soit (e_0, e_1, \dots, e_p) une base de E . Supposons que l'on connaisse les images de ces vecteurs par une application linéaire f :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad f(e_i) = v_i \text{ donné} \quad (\star)$$

D'une part on peut calculer les images de n'importe quel vecteur de E par f . En effet, si $u \in E$, alors

$$\exists! (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad u = \sum \lambda_i e_i$$

et par suite

$$f(u) = f\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i f(e_i) = \sum \lambda_i v_i$$

D'autre part il n'y a qu'une seule application linéaire vérifiant la condition (\star) . En effet si g vérifie (\star) alors par on refait le calcul précédent

$$\begin{aligned} \exists! (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \\ u = \sum \lambda_i e_i \quad g(u) = g\left(\sum \lambda_i e_i\right) \\ = \sum \lambda_i g(e_i) = \sum \lambda_i v_i \end{aligned}$$

et par suite

$$\forall u \in E, \quad g(u) = f(u)$$

donc en fait $f = g$. □

Application 1 Forme canonique d'une application linéaire Cherchons les applications linéaires de \mathbb{K} dans \mathbb{K} . Soit donc f une application linéaire de f dans f . Posons $\alpha = f(1)$.

L'application $g : \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \alpha x \end{cases}$ est linéaire (à faire). Or f et g coïncident sur une base de \mathbb{K} , à savoir (1). Donc $f = g$. On a donc démontré que les seuls applications linéaires de \mathbb{K} dans \mathbb{K} sont les homothéties.

III.2 — Rang d'une application linéaire

Propriété 3.2 — Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_p) une base quelconque de E .

$(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Dém.

□

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Dans ce cas on a vu $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. Ainsi $\text{Im } f$ est une espace vectoriel de dimension finie. De plus cette dimension est inférieure ou égale à p .

Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *rang* de f la dimension de l'espace vectoriel $\text{Im } f$: $\text{rg } f \stackrel{\text{déf.}}{=} \dim(\text{Im } f)$.

III.3 — Théorème du rang, bijectivité

Théorème 3.4 — Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.

Dém. On complète une base de $\text{Ker } f$ en une base de E . Ensuite on démontre que les images des vecteurs qui complètent forment une famille libre. □

Corollaire 3.5 — Soit f une application linéaire entre deux espace vectoriel E et F de dimensions finies.

- 1) f est injective si et seulement si $\text{rg } f = \dim E$;
- 2) f est surjective si et seulement si $\text{rg } f = \dim F$;

3) f est bijective si et seulement si $\text{rg } f = \dim E = \dim F$;

Dém. à l'aide du théorème du rang. □

Corollaire 3.6 — Si F est de dimension finie et si $\dim F = \dim E$ alors on a l'équivalence

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Dém. □

Ce théorème est particulièrement utile dans le cas des endomorphismes.

Propriété 3.7 — Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie (resp. F de dimension finie) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 S'il existe un isomorphisme entre E et F alors F est aussi de dimension finie (resp. E est aussi de dimension finie) et $\dim E = \dim F$.

Application 2 L'ensemble des E suites récurrentes d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

(où a et b sont deux scalaires donnés) est une espace vectoriel de dimension 2.

C'est une espace vectoriel en tant que noyau de $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
 $u \longmapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est de dimension 2 car $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective.
 $u \longmapsto (u_0, u_1)$

IV — Matrice d'une application linéaire

C'est un outil très efficace, mais dont la définition doit être bien maîtrisée !

On se place dans le cas où E et F sont deux \mathbb{K} -espace vectoriel de dimensions finies, respectivement p et n .

IV.1 — Définition

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (*_0, *_1, \dots, *_p)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On a vu que f est entièrement déterminé par l'image des vecteurs de la base \mathcal{B} , c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= m_{11}f_1 + m_{21}f_2 + \dots + m_{n1}f_n \\ &\dots \\ f(e_j) &= m_{1j}f_1 + m_{2j}f_2 + \dots + m_{nj}f_n \\ &\dots \\ f(e_p) &= m_{1p}f_1 + m_{2p}f_2 + \dots + m_{np}f_n \end{aligned}$$

Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle *matrice de l'application linéaire* f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base \mathcal{C} .

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre *la même base* au départ et à l'arrivée. On note simplement $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans ce cas.

On a aussi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple

- identité, application linéaire nulle, homothéties;
- exemple dans \mathbb{K}^n avec les bases canoniques.

Théorème 4.3 — Unicité de la matrice

Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

Dém. C'est un corollaire du théorème ??

□

Corollaire 4.4 — Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire f de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n dont M est la matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

IV.2 — Opération sur les matrices

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F . Soit f et ψ deux application linéaire de E dans F .

Théorème 4.5 — Opérations et représentation matricielle

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F .

- 1) $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f + g) = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$;
- 2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$.

Utilisation du produit matriciel

Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – I

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice représentant f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Si u est un vecteur de u représenté par $U_{\mathcal{B}}$ dans la base \mathcal{B} alors $M \times U_{\mathcal{B}}$ représente $f(u)$ dans la base \mathcal{C} .

Dém. Par le calcul. □

On se place maintenant dans le cas d'endomorphismes.

Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – II

Soit f et g deux endomorphismes représentés respectivement par M et N dans la base \mathcal{B} de E . Alors MN représente $f \circ g$ dans la base \mathcal{B} .

Ainsi au calcul matriciel correspond un calcul identique sur les endomorphismes. On a logiquement le résultat suivant

Théorème 4.8 — Utilisation du produit matriciel – III

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base \mathcal{B} .

L'endorphisme f est bijectif si et seulement si M est inversible.

De plus, dans ce cas $M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Dém. Si M est inversible : on pose g l'unique endorphisme dont la matrice est M^{-1} . Comme la matrice de $f \circ g$ et de $g \circ f$ est I_n , on en déduit que $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$ et donc que f est bijective de bijection réciproque g . □

Ce théorème permet de calculer facilement la bijection réciproque d'un automorphisme.

Enfin pour compléter l'analogie, notons que

Théorème 4.9 — Matrice d'une application linéaire et rang

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base \mathcal{B} .

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M$$

Application 3 Soit M une matrice carrée. On suppose qu'il existe N tel que $MN = I_n$. Alors M est inversible, d'inverse N .

En effet, si f et g sont les application linéaire de \mathbb{K}^n associées à M et N dans la base canonique de \mathbb{K}^n , il est facile de voir que g est injective, donc bijective. Sa bijection réciproque est nécessairement f .