Applications linéaires

BCPST I — 14 septembre 2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*

I — Définitions et opérations

I.1 — Définitions

Définition 1.1 — *Une application f de E dans F est dite* linéaire *si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $\forall (u,v) \in E^2, \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E, \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Exemple

- L'exemple le plus simple : Id_E. De même pour l'application $\lambda \mathrm{Id}_E \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \lambda u \end{array} \right.$, où λ est un scalaire quelconque. Ces applications sont dénommées homotéthies vectorielles.
- si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel alors $\varphi \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & 0_E \end{array} \right.$ est une application linéaire
- de $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans E : $\varphi \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$.
- de $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$: $\varphi \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f \end{array} \right.$;
- de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array} \right.$;

Remarque I.1 Si f est une application linéaire de E dans F alors $f(0_E) = 0_F$.

Vocabulaire et notations

– Une application linéaire est parfois qualifiée de morphisme d'espaces vectoriels.
– Si les espaces de départ et d'arrivée sont indentiques ($F = E$) on parle d'endomorphisme.
– Si l'application est bijective, on parle d'isomorphisme.
– Enfin un endomorphisme bijectif est un automorphisme.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$. L'ensemble des endomorphismes $\mathscr{L}(E)$, et celui des automorphismes $GL(E)$.

Application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans K^p.

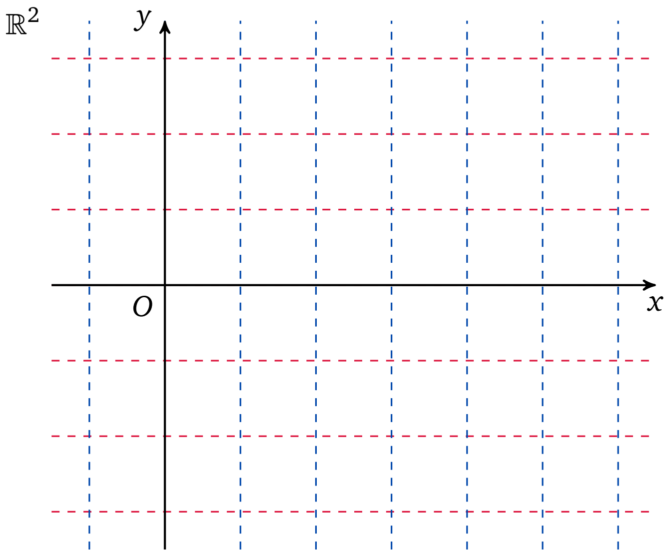
Une application de la forme

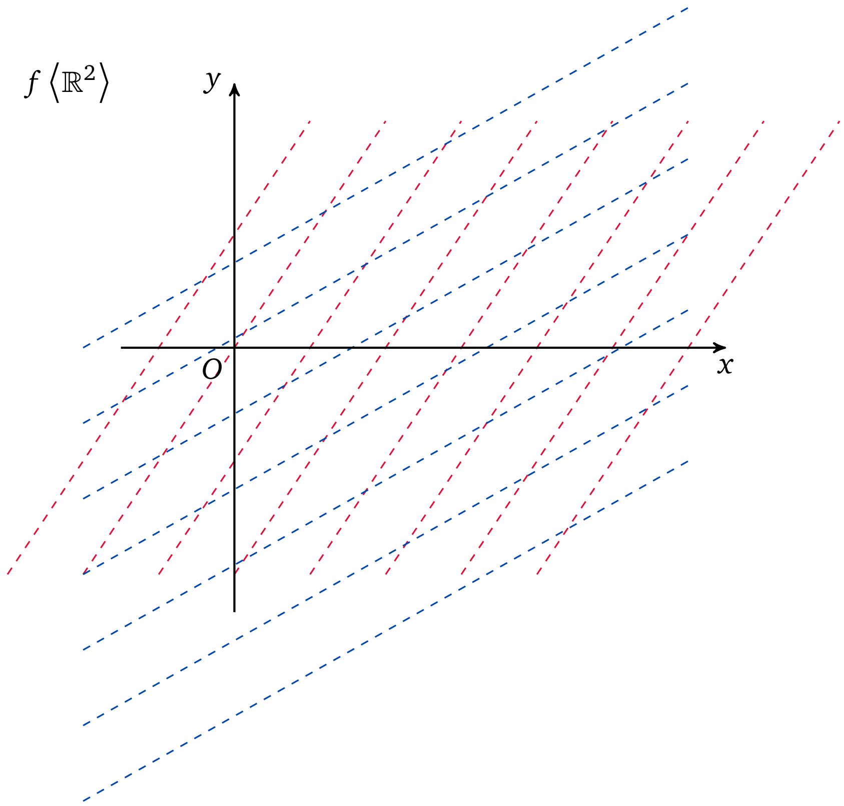
$$f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \longmapsto & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p) \end{array} \right.$$

où $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathbb{K}^{n\times p}$, est réputée linéaire, de K^p dans K^n.

On peut ainsi représenter des application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, par exemple

$$f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x+2y, 2x+3y) \end{array} \right. .$$





I.2 — Opérations sur les applications linéaires

Propriété 1.3 — *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{K}$.*
Alors $f+g$ et αf sont deux applications linéaires de E dans F.

Dém. Vérifions-le pour $f+g$. Soit u et v deux vecteurs et $\lambda \in K$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda u+v) &= f(\lambda u+v)+g(\lambda u+v)\\ &= \lambda f(u)+f(v)+\lambda g(u)+g(v) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } g\\ &= \lambda(f(u)+g(u))+(f(v)+g(v))\\ &= \lambda(f+g)(u)+(f+g)(v)\end{aligned}$$ □

Théorème 1.4 — **Linéarité de la bijection réciproque**
Soit f une application linéaire bijective de E dans F.
La bijection réciproque f^{-1} de f est une applications linéaires de F dans E. E.

Dém. On va faire un raisonnement par équivalence.

Soit u et v deux vecteurs et λ un scalire. On veut démontrer que

$$f^{-1}(\lambda u+v)=\lambda f^{-1}(u)+f^{-1}(v)$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
& & f^{-1}(\lambda u+v)=\lambda f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\\
\Longleftrightarrow & & af\left(f^{-1}(\lambda u+v)\right)=f\left(\lambda f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right)\\
\Longleftrightarrow & & a\lambda u+v=\lambda f\left(f^{-1}(u)\right)+f\left(f^{-1}(v)\right)\\
& & \text{par linéarité de } f\\
\Longleftrightarrow & & \lambda u+v=\lambda u+v
\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie, la première l'est également. □

Propriété 1.5 — Composée d'applications linéaires

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

Alors $g\circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Dém. De même que précedemment. □

Propriété 1.6 — Distributivité de la composition sur l'addition

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1) *Si f_1 et f_2 sont deux application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors*
$$g\circ(f_1+f_2)\circ g=g\circ f_1+g\circ f_2$$

2) *Si g_1 et g_2 sont deux application linéaire de F dans G et f une application linéaire de E dans F alors*
$$(g_1+g_2)\circ f=g_1\circ f+g_2\circ f$$

Dém. La seconde propriété se démontre sans utiliser la linéarité d'aucune application. Il n'en va pas de même de la première.

En effet, soit u dans F. On a

$$g\circ(f_1+f_2)(u)=g(f_1(u)+f_2(u))=g(f_1(u))+g(f_2(u))$$
$$\text{par linéarité de } g$$

d'où le résultat. □

Cette propriété de distributivité permet d'assimiler la composition d'application linéaire à une multiplication. On verra d'ailleurs plus tard le parallèle très fort avec le produit matriciel.

Cas de $\mathscr{L}(E)$ Dans $\mathscr{L}(E)$ la composition se comporte comme une multiplication non commutative : $\mathscr{L}(E)$ est stable par la composition, associativité, élément neutre (Id_E), non commutativité, distributivité par rapport à l'addition et transitivité par rapport à la multiplication par un scalaire.

Cette analogie avec la multiplication justifie la notation suivante

Notation puissance Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

- $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f composée n fois avec elle-même) ;
- et $f^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention.
- Si f est bijective, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

C'est une surcharge assez exotique de la notation puissance, à laquelle il faudra bien prendre garde.

II — Noyau, image d'une application linéaire

II.1 — Noyau

Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = 0_F$, d'inconnue $u \in E$, s'appelle le noyau de f. On le note $\mathrm{Ker}\, f$:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{u \in E \ \textit{tel que} \ f(u) = 0_F\}$$

Propriété 2.2 — $\mathrm{Ker}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Dém. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel:

- D'abord $\mathrm{Ker}\, f \subset E$;
- ensuite $f(0_E) = 0_F$, donc 0_E est dans $\mathrm{Ker}\, f$, et donc $\mathrm{Ker}\, f$ n'est pas vide ;
- soit u et v deux vecteurs de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= \lambda 0_F + 0_F = 0_F \end{aligned}$$

donc $\lambda u + v \in \operatorname{Ker} f$. □

Théorème 2.3 — Injectivité et noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Dém. Supposons d'abord que f est injective. Soit $u \in \operatorname{Ker} f$. Comme $f(u) = f(0_E) = 0_F$ et que f est injective, nécessairement $u = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproque : supposons que $\operatorname{Ker} f = zev$. Dans ce cas, soit u et u' deux éléments de E ayant la même image par f :

$$f(u) = f(u') \iff f(u) - f(u') = 0_F \iff f(u-u') = 0_F$$

Ainsi $u - u' \in \operatorname{Ker} f$. Comme $\operatorname{Ker} f$ est réduit au vecteur nul, $u - u' = 0_E$, donc $u = u'$. Cela prouve que f est injective. □

Exemple Noyaux de l'application dérivée, d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$.

II.2 — Image

Théorème 2.5 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire

Soit f est une application linéaire de E dans F. Alors pour tout sev G de E, l'ensemble $f\langle G\rangle$ est un sous-espace vectoriel de F.

Dém. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel. □

Définition 2.6 — Image d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

L'ensemble $f\langle E\rangle$ s'appelle l'image de f. On le note $\operatorname{Im} f$.

Théorème 2.7 — Image et surjectivité

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$

Dém. C'est une trivialité. □

Exemple Exemple de l'image de la dérivation restreinte à $\mathbb{K}[X]$, à $\mathbb{K}_2[X]$, de l'image d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$.

Exemple Exemple complet : les homothéties.

III — Applications linéaires en dimension finie

On suppose désormais que que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à p.

III.1 — Caractérisation d'une application linéaire en dimension finie

Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie p.

Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

Dém. Précisons l'énoncé de ce théorème. Soit $\left(e_0, e_1, \dots, e_p\right)$ une base de E. Supposons que l'on connaisse les images de ces vecteurs par une application linéaire f :

$$\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!], \qquad f(e_i) = v_i \text{ donné} \tag{$\star$}$$

D'une part on peut calculer les images de n'importe quel vecteur de E par f. En effet, si $u \in E$, alors

$$\exists! \left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p, \qquad u = \sum \lambda_i e_i$$

et par suite

$$f(u) = f\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i f(e_i) = \sum \lambda_i v_i$$

D'autre part il n'y a qu'une seule application linéaire vérifiant la condition $(\star)$. En effet si g vérifie $(\star)$ alors par on refait le calcul précédent

$$\exists! \left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p,$$
$$u = \sum \lambda_i e_i g(u) = g\left(\sum \lambda_i e_i\right)$$
$$= \sum \lambda_i g(e_i) = \sum \lambda_i v_i$$

et par suite

$$\forall u \in E, \qquad g(u) = f(u)$$

donc en fait $f = g$. □

Application 1 Forme canonique d'une application linéaire Cherchons les applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Soit donc f une application linéaire de f dans f. Posons $\alpha = f(1)$.

L'application $g \quad : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array}\right.$ est linéaire (à faire). Or f et g coïncident sur une base de $\mathbb{K}$, à savoir (1). Donc $f = g$. On a donc démontré que les seuls applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont les homotéthies.

III.2 — Rang d'une application linéaire

Propriété 3.2 — *Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_p)$ une base quelconque de E.*

$(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Dém. □

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Dans ce cas on a vu $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p))$. Ainsi $\operatorname{Im} f$ est une espace vectoriel de dimension finie. De plus cetet dimension est inférieure ou égale à p.

Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle rang de f la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$: $\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$.

III.3 — Théorème du rang, bijectivité

Théorème 3.4 — Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Dém. On compléte une base de $\operatorname{Ker} f$ en une base de E. Ensuite on démontre que les images des vecteurs qui complétent forment une famille libre. □

Corollaire 3.5 — *Soit f une application linéaire entre deux espace vectoriel E et F de dimensions finies.*

1) *f est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E$;
2) *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim F$;

3) f est bijective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$ *;*

Dém. à l'aide du théorème du rang. □

Corollaire 3.6 — *Si F est de dimension finie et si* $\dim F = \dim E$ *alors on a l'équivalence*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Dém. □

Ce théorème est particulièrement utile dans le cas des endomorphismes.

Propriété 3.7 — *Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie (resp. F de dimension finie) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

S'il existe un isomorphisme entre E et F alors F est aussi de dimension finie (resp. E est aussi de dimension finie) et $\dim E = \dim F$.

Application 2 L'ensemble des E suites récurrentes d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

(où a et b sont deux scalaires donnés) est une espace vectoriel de dimension 2.

C'est une espace vectoriel en tant que noyau de $f \;:\; \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$.

Il est de dimension 2 car $g \;:\; \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est bijective.

IV — Matrice d'une application linéaire

C'est un outil très efficace, mais dont la définition doit être bien maîtrisée !

On se place dans le cas où E et F sont deux $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimensions finies, respectivement p et n.

IV.1 — Définition

Soi $\mathscr{B} = \left(e_0, e_1, \ldots, e_p\right)$ une base de E et $\mathscr{C} = \left(*_0, *_1, \ldots, *_p\right) f$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F. On a vu que f est entièrement déterminé par l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= m_{11} f_1 + m_{21} f_2 + \cdots + m_{n1} f_n \\ &\ldots \\ f(e_j) &= m_{1j} f_1 + m_{2j} f_2 + \cdots + m_{nj} f_n \\ &\ldots \\ f(e_p) &= m_{1p} f_1 + m_{2p} f_2 + \cdots + m_{np} f_n \end{aligned}$$

Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$.

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre *la même base* au départ et à l'arrivée. On note simplement $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans ce cas.

On a aussi

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Exemple

- identité, application linéaire nulle, homothéties ;
- exemple dans $\mathbb{K}^n$ avec les bases canoniques.

Théorème 4.3 — Unicité de la matrice

Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

Dém. C'est un corollaire du théorème 3.1 □

Corollaire 4.4 — *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

IV.2 — Opération sur les matrices

Soi $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F. Soit f et ψ deux application linéaire de E dans F.

Théorème 4.5 — Opérations et représentation matricielle

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.

1) $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f+g) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) + \operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(g)$;
2) *pour* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda \operatorname{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f)$.

Utilisation du produit matriciel

Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – I

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et M la matrice représentant f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Si u est un vecteur de u représenté par $U_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$ alors $M \times U_{\mathscr{B}}$ représente $f(u)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Dém. Par le calcul. □

On se place maintenant dans le cas d'endomorphismes.

Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – II

Soit f et g deux endomorphismes représentés respectivement par M et N dans la base $\mathscr{B}$ de E. Alors MN représente $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$.

Ainsi au calcul matriciel correspond un calcul identique sur les endomorphismes. On a logiquement le résultat suivant

Théorème 4.8 — Utilisation du produit matriciel – III

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

L'endorphisme f est bijectif si et seulement si M est inversible.

De plus, dans ce cas $M^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Dém. Si M est inversible : on pose g l'unique endorphisme dont la matrice est M^-1. Comme la matrice de $f \circ g$ et de $g \circ f$ est I_n, on en déduit que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et donc que f est bijective de bijection réciproque g. □

Ce théorème permet de calculer facilement la bijection réciproque d'un automorphisme.

Enfin pour compléter l'analogie, notons que

Théorème 4.9 — Matrice d'une application linéaire et rang

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M$$

Application 3 Soit M une matrice carrée. On suppose qu'il existe N tel que $MN = I_n$. Alors M est inversible, d'inverse N.

En effet, si f et g sont les application linéaire de $\mathbb{K}^n$ associées à M et N dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il est facile de voir que g est injective, donc bijective. Sa bijection réciproque est nécessairement f.