

# APPLICATIONS LINÉAIRES

BCPST I, 27/03/2018

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

## I — Définitions et opérations

### I.1 — Définitions

**Définition 1.1** — Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite **linéaire** si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1)  $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v);$
- 2)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

#### Exemple

- L'exemple le plus simple :  $\text{Id}_E$ . De même pour l'application  $\lambda \text{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \lambda u \end{cases}$ , où  $\lambda$  est un scalaire quelconque. Ces applications sont dénommées **homotéthies vectorielles**.
- si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel alors  $\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto 0_E \end{cases}$  est une application linéaire
- de  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dans  $E : \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{cases}$ .
- de  $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R} : \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f \end{cases}$  ;
- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x \end{cases}$  ;

**Remarque I.1** Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors  $f(0_E) = 0_F$ .

#### Vocabulaire et notations

- Une application linéaire est parfois qualifiée de **morphisme** d'espaces vectoriels.
- Si les espaces de départ et d'arrivée sont indentiques ( $F = E$ ) on parle d'**endomorphisme**.
- Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
- Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble des endomorphismes  $\mathcal{L}(E)$ , et celui des automorphismes  $GL(E)$ .

Application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$ .

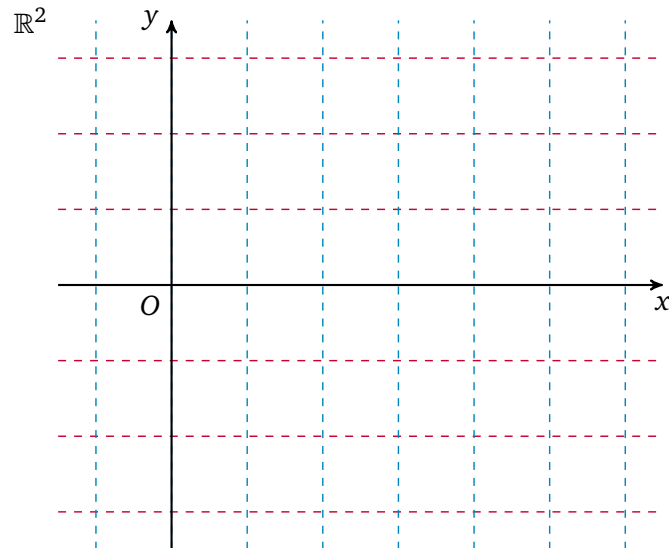
Une application de la forme

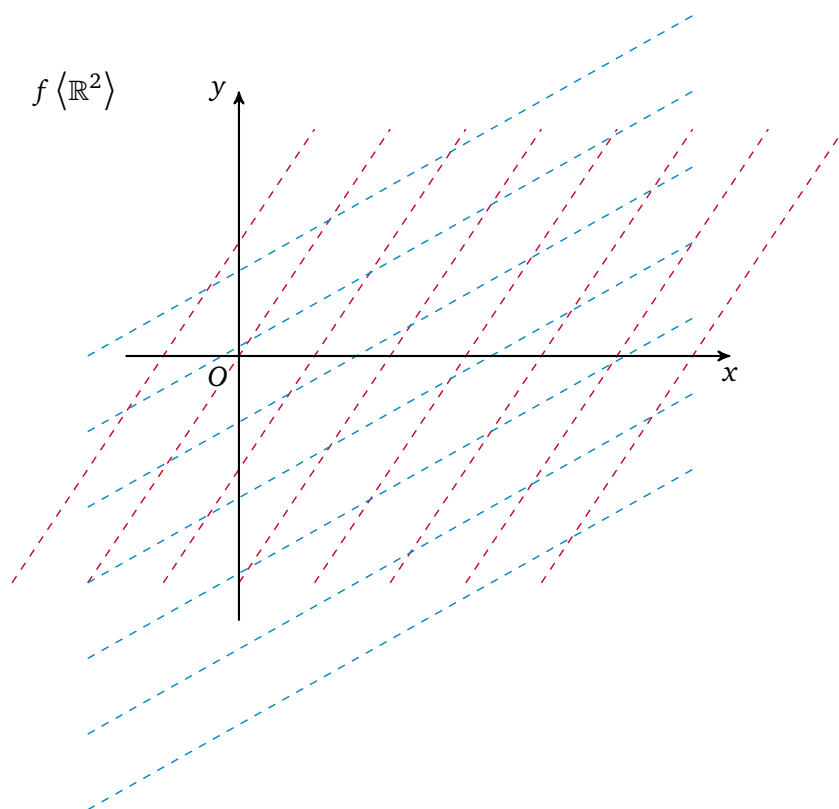
$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \longmapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p) \end{cases}$$

où  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{n \times p}$ , est réputée linéaire, de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

On peut ainsi représenter des application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , par exemple  $f$  :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (-x + 2y, 2x + 3y) \end{cases} .$$





## I.2 — Opérations sur les applications linéaires

**Propriété 1.3** — Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors  $f + g$  et  $\alpha f$  sont deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

DÉM. Vérifions-le pour  $f + g$ . Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs et  $\lambda \in K$ . On a

$$\begin{aligned}
 (f + g)(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) + g(\lambda u + v) \\
 &= \lambda f(u) + f(v) + \lambda g(u) + g(v) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } g \\
 &= \lambda(f(u) + g(u)) + (f(v) + g(v)) \\
 &= \lambda(f + g)(u) + (f + g)(v) \quad \square
 \end{aligned}$$

### **Théorème 1.4 — Linéarité de la bijection réciproque**

Soit  $f$  une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$ .

La bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est une applications linéaires de  $F$  dans  $E$ .  $E$ .

DÉM. On va faire un raisonnement par équivalence.

Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs et  $\lambda$  un scalaire. On veut démontrer que

$$f^{-1}(\lambda u + v) = \lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\lambda u + v) = \lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \\ \iff & af(f^{-1}(\lambda u + v)) = f(\lambda f^{-1}(u) + f^{-1}(v)) \\ \iff & a\lambda u + v = \lambda f(f^{-1}(u)) + f(f^{-1}(v)) \\ & \hspace{15em} \text{par linéarité de } f \\ \iff & \lambda u + v = \lambda u + v \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie, la première l'est également.  $\square$

### Propriété 1.5 — Composée d'applications linéaires

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ .

Alors  $g \circ f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ .

DÉM. De même que précédemment.  $\square$

### Propriété 1.6 — Distributivité de la composition sur l'addition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1) Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$  alors

$$g \circ (f_1 + f_2) \circ g = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

2) Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux application linéaire de  $F$  dans  $G$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

DÉM. La seconde propriété se démontre sans utiliser la linéarité d'aucune application. Il n'en va pas de même de la première.

En effet, soit  $u$  dans  $F$ . On a

$$g \circ (f_1 + f_2)(u) = g(f_1(u) + f_2(u)) = g(f_1(u)) + g(f_2(u))$$

par linéarité de  $g$

d'où le résultat.  $\square$

Cette propriété de distributivité permet d'assimiler la composition d'application linéaire à une multiplication. On verra d'ailleurs plus tard le parallèle très fort avec le produit matriciel.

*Cas de  $\mathcal{L}(E)$*  Dans  $\mathcal{L}(E)$  la composition se comporte comme une multiplication non commutative :  $\mathcal{L}(E)$  est stable par la composition, associativité, élément neutre ( $\text{Id}_E$ ), non commutativité, distributivité par rapport à l'addition et transitivité par rapport à la multiplication par un scalaire.

Cette analogie avec la multiplication justifie la notation suivante

*Notation puissance* Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note

- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $f$  composée  $n$  fois avec elle-même) ;
- et  $f^0 = \text{Id}_E$  par convention.
- Si  $f$  est bijective, on note  $f^{-n} = (f^{-1})^n$ .

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

C'est une surcharge assez exotique de la notation puissance, à laquelle il faudra bien prendre garde.

## II — Noyau, image d'une application linéaire

### II.1 — Noyau

#### Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $f(u) = 0_F$ , d'inconnue  $u \in E$ , s'appelle le *noyau de  $f$* .

On le note  $\text{Ker } f$  :

$$\text{Ker } f = \{u \in E \text{ tel que } f(u) = 0_F\}$$

#### Propriété 2.2 — $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de $E$ .

DÉM. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel:

- D'abord  $\text{Ker } f \subset E$  ;
- ensuite  $f(0_E) = 0_F$ , donc  $0_E$  est dans  $\text{Ker } f$ , et donc  $\text{Ker } f$  n'est pas vide ;
- soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\text{Ker } f$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= \lambda 0_F + 0_F = 0_F \end{aligned}$$

donc  $\lambda u + v \in \text{Ker } f$ .

□

**Théorème 2.3 — Injectivité et noyau**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .

DÉM. Supposons d'abord que  $f$  est injective. Soit  $u \in \text{Ker } f$ . Comme  $f(u) = f(0_E) = 0_F$  et que  $f$  est injective, nécessairement  $u = 0_E$ . Ainsi  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .

Réciproque : supposons que  $\text{Ker } f = \text{zev}$ . Dans ce cas, soit  $u$  et  $u'$  deux éléments de  $E$  ayant la même image par  $f$  :

$$f(u) = f(u') \iff f(u) - f(u') = 0_F \iff f(u - u') = 0_F$$

Ainsi  $u - u' \in \text{Ker } f$ . Comme  $\text{Ker } f$  est réduit au vecteur nul,  $u - u' = 0_E$ , donc  $u = u'$ . Cela prouve que  $f$  est injective.  $\square$

**Exemple** Noyaux de l'application dérivée, d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$ , de  $\mathbb{R}^3$ .

**II.2 — Image****Théorème 2.5 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire**

Soit  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors pour tout sev  $G$  de  $E$ , l'ensemble  $f \langle G \rangle$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

DÉM. Par la caractérisation des sous-espace vectoriel.  $\square$

**Définition 2.6 — Image d'une application linéaire**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

L'ensemble  $f \langle E \rangle$  s'appelle l'image de  $f$ . On le note  $\text{Im } f$ .

**Théorème 2.7 — Image et surjectivité**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$

DÉM. C'est une trivialité.  $\square$

**Exemple** Exemple de l'image de la dérivation restreinte à  $\mathbb{K}[X]$ , à  $\mathbb{K}_2[X]$ , de l'image d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple** Exemple complet : les homothéties.

### III — Applications linéaires en dimension finie

On suppose désormais que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie égale à  $p$ .

#### III.1 — Caractérisation d'une application linéaire en dimension finie

##### **Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  étant de dimension finie  $p$ .

Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

DÉM. Précisons l'énoncé de ce théorème. Soit  $(e_0, e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Supposons que l'on connaisse les images de ces vecteurs par une application linéaire  $f$  :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad f(e_i) = v_i \text{ donné} \quad (\star)$$

D'une part on peut calculer les images de n'importe quel vecteur de  $E$  par  $f$ . En effet, si  $u \in E$ , alors

$$\exists! (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad u = \sum \lambda_i e_i$$

et par suite

$$f(u) = f\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i f(e_i) = \sum \lambda_i v_i$$

D'autre part il n'y a qu'une seule application linéaire vérifiant la condition  $(\star)$ . En effet si  $g$  vérifie  $(\star)$  alors par on refait le calcul précédent

$$\begin{aligned} \exists! (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \\ u = \sum \lambda_i e_i \\ g(u) = g\left(\sum \lambda_i e_i\right) \\ = \sum \lambda_i g(e_i) = \sum \lambda_i v_i \end{aligned}$$

et par suite

$$\forall u \in E, \quad g(u) = f(u)$$

donc en fait  $f = g$ . □

**Application 1** Forme canonique d'une application linéaire Cherchons les applications linéaires de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit donc  $f$  une application linéaire de  $f$  dans  $f$ . Posons  $\alpha = f(1)$ . L'application  $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  est linéaire (à faire). Or  $f$  et  $g$  coïncident sur une base de  $\mathbb{K}$ , à savoir  $(1)$ . Donc  $f = g$ . On a donc démontré que les seuls applications linéaires de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  sont les homothéties.

### III.2 — Rang d'une application linéaire

**Propriété 3.2** — Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base quelconque de  $E$ .  
 $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

DÉM. □

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Dans ce cas on a vu  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ . Ainsi  $\text{Im } f$  est un espace vectoriel de dimension finie. De plus cette dimension est inférieure ou égale à  $p$ .

#### Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **rang** de  $f$  la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Im } f$  :  $\text{rg } f \stackrel{\text{déf.}}{=} \dim(\text{Im } f)$ .

### III.3 — Théorème du rang, bijectivité

#### Théorème 3.4 — Théorème du rang

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
 $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$ .

DÉM. On complète une base de  $\text{Ker } f$  en une base de  $E$ . Ensuite on démontre que les images des vecteurs qui complètent forment une famille libre. □

**Corollaire 3.5** — Soit  $f$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimensions finies.

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim E$ ;
- 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim F$ ;
- 3)  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim E = \dim F$ ;

DÉM. à l'aide du théorème du rang. □

**Corollaire 3.6** — Si  $F$  est de dimension finie et si  $\dim F = \dim E$  alors on a l'équivalence

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$



DÉM.

□

Ce théorème est particulièrement utile dans le cas des endomorphismes.

**Propriété 3.7** — Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  de dimension finie (resp.  $F$  de dimension finie) et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

S'il existe un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  alors  $F$  est aussi de dimension finie (resp.  $E$  est aussi de dimension finie) et  $\dim E = \dim F$ .

**Application 2** L'ensemble des  $E$  suites récurrentes d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

(où  $a$  et  $b$  sont deux scalaires donnés) est une espace vectoriel de dimension 2.

C'est une espace vectoriel en tant que noyau de  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Il est de dimension 2 car  $g : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$  est bijective.

## IV — Matrice d'une application linéaire

C'est un outil très efficace, mais dont la définition doit être bien maîtrisée !

On se place dans le cas où  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimensions finies, respectivement  $p$  et  $n$ .

### IV.1 — Définition

Soi  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (*_0, *_1, \dots, *_p)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On a vu que  $f$  est entièrement déterminé par l'image des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire par

$$f(e_1) = m_{11}f_1 + m_{21}f_2 + \dots + m_{n1}f_n$$

...

$$f(e_j) = m_{1j}f_1 + m_{2j}f_2 + \dots + m_{nj}f_n$$

...

$$f(e_p) = m_{1p}f_1 + m_{2p}f_2 + \dots + m_{np}f_n$$

### Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  et  $F$  de dimensions finies,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle *matrice de l'application linéaire*  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  la matrice de la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre la même base au départ et à l'arrivée. On note simplement  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  dans ce cas.

On a aussi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

### Exemple

- identité, application linéaire nulle, homothéties ;
- exemple dans  $\mathbb{K}^n$  avec les bases canoniques.

### Théorème 4.3 — Unicité de la matrice

Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

DÉM. C'est un corollaire du théorème 3.1

□

**Corollaire 4.4** — Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont  $M$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

## IV.2 — Opération sur les matrices

Soi  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  et  $\psi$  deux application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

### Théorème 4.5 — Opérations et représentation matricielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  et  $F$  de dimensions finies,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

- 1)  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f + g) = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$ ;
- 2) pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$ .

Utilisation du produit matriciel

### Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – I

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $M$  la matrice représentant  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Si  $u$  est un vecteur de  $E$  représenté par  $U_{\mathcal{B}}$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors  $M \times U_{\mathcal{B}}$  représente  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

DÉM. Par le calcul.

□

On se place maintenant dans le cas d'endomorphismes.

**Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – II**

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes représentés respectivement par  $M$  et  $N$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Alors  $MN$  représente  $f \circ g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Ainsi au calcul matriciel correspond un calcul identique sur les endomorphismes. On a logiquement le résultat suivant

**Théorème 4.8 — Utilisation du produit matriciel – III**

Soit  $f$  un endomorphisme représenté par la matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'endomorphisme  $f$  est bijectif si et seulement si  $M$  est inversible.

De plus, dans ce cas  $M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ .

DÉM. Si  $M$  est inversible : on pose  $g$  l'unique endomorphisme dont la matrice est  $M^{-1}$ . Comme la matrice de  $f \circ g$  et de  $g \circ f$  est  $I_n$ , on en déduit que  $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$  et donc que  $f$  est bijective de bijection réciproque  $g$ .  $\square$

Ce théorème permet de calculer facilement la bijection réciproque d'un automorphisme. Enfin pour compléter l'analogie, notons que

**Théorème 4.9 — Matrice d'une application linéaire et rang**

Soit  $f$  un endomorphisme représenté par la matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$\text{rg } f = \text{rg } M$$

**Application 3** Soit  $M$  une matrice carrée. On suppose qu'il existe  $N$  tel que  $MN = I_n$ . Alors  $M$  est inversible, d'inverse  $N$ .

En effet, si  $f$  et  $g$  sont les application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  associées à  $M$  et  $N$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , il est facile de voir que  $g$  est injective, donc bijective. Sa bijection réciproque est nécessairement  $f$ .

