

Systemes d'equations lineaires

BCPST I — 2020/2021



Notations du chapitre — Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; on appelle les éléments de \mathbb{K} des *scalaires*. n et p sont deux entiers naturels non nuls.

I — Définitions et vocabulaire

Définition 1.1 — Équation linéaire

Une *équation linéaire à p inconnues* est une équation de la forme

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

- où $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ sont les **coefficients** de l'équation;
- $b \in \mathbb{K}$ est le **second membre** de l'équation;
- et (x_1, x_2, \dots, x_p) sont les **inconnues**.

Vocabulaire

- Tout élément (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{K}^p vérifiant cette équation est une **solution** de l'équation.
- L'équation est dite **homogène** lorsque $b = 0$. L'**équation homogène associée à (E)** est l'équation

$$(E_0) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$$

Définition 1.2 — Système d'équations linéaires

Un *système de n équations linéaires à p inconnues* est la donnée de n équations linéaires

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les scalaires $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont les **coefficients**, les scalaires $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment le **second membre** et les $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont les **inconnues** du système.

Vocabulaire

- Une **solution du système (Σ)** est un élément (x_1, x_2, \dots, x_p) de \mathbb{K}^p vérifiant simultanément toutes les équations L_1, L_2, \dots, L_n .
- Le système (Σ) est homogène si et seulement si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Le **système homogène associé à (Σ)** est le système (Σ') obtenu en annulant le second membre de (Σ).
- Le système est **carré** si et seulement si $n = p$ (autant d'inconnues que d'équations).

Définition 1.3 — Systèmes équivalents

Soit (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues. Les systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont **équivalents** si et seulement si ils admettent le même ensemble de solution.

II — Systèmes échelonnés**Définition 2.1 — Inconnues principales et auxiliaires – pivots**

Soit une équation linéaire à p inconnues

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

On appelle **inconnue principale** de l'équation l'inconnue de plus petit indice dont le coefficient est non nul. Ce coefficient s'appelle le **pivot** de l'équation et les autres inconnues sont les **inconnues auxiliaires**.

Définition 2.2 — Système échelonné

Un système de n équations à p inconnues est **échelonné** si et seulement si l'indice de l'inconnue principale augmente strictement d'une ligne à l'autre. Les coefficients des dernières équations peuvent éventuellement être tous nuls.

Résolution des systèmes échelonnés Trois cas de figures se présentent :

1. Si il y a une ligne de la forme « $0 = b_j$ » avec $b_j \neq 0$, alors le système ne peut pas avoir de solutions : il est dit **incompatible**.
2. Sinon le système est **compatible**. On peut le résoudre par la **méthode de la remontée**. Dans chaque équation, en partant de la dernière, on exprime l'inconnue principale en fonction du second membre et d'éventuelles inconnues auxiliaires.
 - (a) S'il y a au moins une variable auxiliaire, celle-ci varie librement dans \mathbb{K} et le système admet donc un nombre infini de solutions : il est dit **indéterminé**.
 - (b) Si il n'y a pas de variable auxiliaire, alors toutes les inconnues reçoivent une unique valeur. Le système admet donc une unique solution : il est dit **déterminé**.

III — Méthode de résolution : pivot de Gauss

Les opérations élémentaires sont les suivantes :

- **Permuter deux lignes** ($L_i \leftrightarrow L_j$). L'opération réciproque est elle même.
- Changer l'ordre des lignes (pas de notation). On peut montrer que cette opération est une succession de permutation de deux lignes.
- **Multiplier une ligne par une constante non nulle** ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$). L'opération réciproque est alors $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$.
- Additionner deux lignes ($L_i \leftarrow L_i + L_j$). La réciproque est $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
- **Additionner à une ligne une autre ligne multipliée par une constante** ($L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$). L'opération réciproque est $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$.
- Additionner à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. Cela revient à faire plusieurs opérations du type précédent.
- **Supprimer une équation « 0 = 0 »**.
- Supprimer une équation présente en double.
- Supprimer une équation qui est une combinaison linéaire des autres.

Les opérations en gras sont les opération élémentaires à proprement parler ; les autres sont des enchaînements « sûrs » d'une ou plusieurs opérations élémentaires.

La méthode du pivot de Gauss permet, par une succession d'opérations élémentaires, de transformer une système de p équations à n inconnues (Σ) en système échelonné équivalent.

Élimination de x_1 Si x_1 n'apparaît dans aucune équation, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_1 et on l'amène en premier dans le système.

À l'aide de L_1 , on élimine x_1 dans les autres équations L_2, L_3, \dots , jusqu'à L_n avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

On obtient ainsi un système où seule L_1 contient l'inconnue x_1 .

Élimination de x_2 *On ne touche plus aux lignes contenant x_1 dans la suite de la méthode.*

Si x_2 n'apparaît dans aucune équation restante, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_2 et on l'amène en second dans le système.

À l'aide de L_2 , on élimine x_2 dans les autres équations avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_2$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

etc. et ainsi de suite. On élimine successivement les inconnues x_1, x_2 , etc. jusqu'à x_p en « gelant » progressivement les premières lignes du système.

La méthode s'arrête nécessairement sur un système échelonné.

Théorème 3.1 — *Quelque soit les opérations effectuées dans la méthode du pivot de Gauss, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant : c'est le **rang** du système (Σ).*

Système homogène Un système homogène possède toujours au moins une solution, à savoir $x_1 = \dots = x_p = 0$; il est donc toujours compatible.

Système carré Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un **système de Cramer**.

Système de Cramer Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un **système de Cramer**.

Système triangulaire C'est un système carré de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots = \dots \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Attention ! Les coefficients diagonaux a_{11}, a_{22} , etc. sont éventuellement nuls.

Théorème 3.2 — *Un système triangulaire est un système de Cramer si et seulement si il n'a aucun zéro sur la diagonale.*

