

# Équations linéaires

BCPST I — 2020/2021

## Les bases

### Exercice 1

Résoudre

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

puis

$$(\Sigma'_1) \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

### Exercice 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$

$$(S_2) \begin{cases} x + 4y + 3z + t = 1 \\ 2x + 5y + 4z - t = 4 \\ x - 3y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$$
$$(S'_2) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$
$$(S''_2) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ 3x + y + 4z + 3t = 11 \\ -2x + 6y + 4z + 10t = 18 \end{cases}$$

### Exercice 3

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant suivant les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , le système linéaire suivant

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + y - 3z = c \\ 2x - y - z = d \end{cases}$$

### Exercice 4

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système

$$(\Sigma_4) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}$$

### Exercice 5

Résoudre en fonction du paramètre  $\lambda$  le système homogène

$$(\Sigma_5) \begin{cases} (2 - \lambda)x + 3y - 3z = 0 \\ 3x + (2 - \lambda)y - 3z = 0 \\ -3x - 3y - (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

### Exercice 6 — Méthode du déterminant

On considère un système  $2 \times 2$  de la forme

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6.$$

1. On suppose que  $ad - bc \neq 0$ . Montrer que dans ce cas  $(\Sigma)$  est un système de Cramer, et exprimer ses solutions en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ .
2. Traiter le cas  $ad - bc = 0$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  et discuter suivant la valeur de  $m$  le système suivant

$$\begin{cases} mx - y = m^2 \\ x + (m - 2)y = 2m \end{cases}$$

4. Résoudre et discuter en fonction des paramètres  $m$  et  $a$ , les solutions du système

$$\begin{cases} (2m - 3)x + (m - 1)y = m + a \\ (5 - m)x + (m + 1)y = m - 2 \end{cases}$$

## Entraînement

### Exercice 7

Résoudre les systèmes linéaires

$$1. (\Sigma_1) \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Réponse :  $(-1, 2, -1)$

$$2. (\Sigma_2) \begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ 7x - 5z = -3 \\ 3x + y - z = 3 \end{cases}$$

Réponse :  $(-4, 10, -5)$

$$3. (\Sigma_3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14; \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$4. (\Sigma_4) \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 3; \end{cases}$$

$$5. (\Sigma_5) \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases} .$$

### Exercice 8

Résoudre les systèmes linéaires

$$1. (\Sigma_1) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = -4 \\ 4x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Réponse :  $(1/2, 0, -1)$

$$2. (\Sigma_2) \begin{cases} 2x - 3y + z - 4t = 12 \\ -x + 2z + t = 0 \\ x + 3z = -24 \\ y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Réponse :  $(3, -33, -9, 21)$

$$3. 2x + 3y - z = 0;$$

$$4. (\Sigma_4) \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ 12y - 7t = 4 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases} .$$

### Exercice 9

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$

$$(\Sigma_9) \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + z = 6 \\ 3x + 6y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$(\Sigma_9'') \begin{cases} 4x + 8z = -2 \\ y - 6z = 2 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$(\Sigma_9') \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

### Exercice 10

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$

$$(\Sigma_{10}) \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

Réponse :  $(0, 2, 2, 1)$

### Exercice 11

Discuter selon les quadruplets  $(a, b, c, d)$  de réels, l'existence de solutions au système

$$(\Sigma_{11}) \begin{cases} x + 2y + 4z + 5t = a \\ x - y + z - t = b \\ -x - y - 3z - 3t = c \\ x + 4y + 6z + 9t = d \end{cases}$$

et le résoudre quand c'est possible.

## Systemes à paramètres

### Exercice 12

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  et de paramètre  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\Sigma_{12}) \begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

### Exercice 13

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre réel  $\lambda$  :

$$(\Sigma_{13}) \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ -4x + (4 - \lambda)y = 0 \\ -2x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

### Exercice 14

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre réel  $\lambda$  :

$$(\Sigma_{14}) \begin{cases} (1 - \lambda)x - y = 0 \\ x - \lambda y - z = 0 \\ -x + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 15**

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre réel  $\lambda$  :

$$(\Sigma_{15}) \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y + 4z = 0 \\ -x + (3-\lambda)y - z = 0 \\ -2x - y + (-3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 16**

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  et de paramètre  $a \in \mathbb{C}$

$$(\Sigma_{16}) \begin{cases} ax - 2y + \frac{1}{4}z = 4 \\ x - ay + \frac{3}{4}z = -2 \\ 2x - 3y + az = 8 \end{cases}$$

**Exercice 17**

Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$

$$(\Sigma_{17}) \begin{cases} x + \beta y + \beta^2 z = 0 \\ \bar{\beta}x + y + \beta z = 0 \\ \bar{\beta}^2 x + \bar{\beta}y + z = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma'_{17}) \begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

$\beta, a, b$  et  $c$  sont trois paramètres complexes, et  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

**Exercice 18**

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ , de paramètres complexes  $a, b$

$$(\Sigma_{a,b}) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

**Exercice 19**

Résoudre le système d'inconnues  $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$  et de paramètres  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$$(\Sigma_{19}) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

**Exercice 20**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Discuter et résoudre les systèmes suivants

$$(\Sigma_{20}) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \quad (\Sigma_{20}) \\ 2x - 2y + 3z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 3 \end{cases}$$

**Utilisation des systèmes****Exercice 21**

Résoudre

$$(\Sigma_{21}) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ -5y + 3z - t = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \text{ est minimum} \end{cases}$$

**Exercice 22**

Résoudre

$$(\Sigma_{22}) \begin{cases} x + 2y + z - t = 5 \\ -2x + y - 2z - 3t = -5 \\ 3x - 2y - z - 3t = 3 \\ -x + y + z + 2t = 0 \\ xy + yz + zt + tx \text{ est maximum} \end{cases}$$

**Exercice 23**

Établir

$$\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\},$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

**★ Exercice 24**

Résoudre le système d'inconnues  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , de paramètres complexes  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$(\Sigma_{24}) \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \dots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_n \end{cases}$$

## Divers

### Exercice 25

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels. Déterminer le nombre de solutions, et résoudre dans  $\mathbb{R}^4$ , le système suivant

$$(\Sigma_{25}) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ \lambda x + y + z + t = 0 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu + 1 \\ x + y + z + \lambda t = \mu - 1 \end{cases}$$

### Exercice 26

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant sur le paramètre réel  $\alpha$

$$1. \begin{cases} \alpha x + (\alpha - 1)y + z = 2\alpha \\ x + y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x + (\alpha + 1)y + z = 2\alpha \end{cases}$$
$$2. \begin{cases} x + \alpha y + 2\alpha z = 0 \\ \alpha x - \alpha y + z = 0 \\ 2\alpha x - 4y + \alpha z = 0 \end{cases}$$

