Système d'équations linéaires

BCPST 1, 05/10/2020

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on appelle les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires. n et p sont deux entiers naturels non nuls.*

I — Définitions et vocabulaire

Définition 1.1 — Équation linéaire

Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme

$$(E) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

- *où $\left(a_1, a_2, \dots, a_p\right) \in \mathbb{K}^p$ sont les coefficients de l'équation;*
- *$b \in \mathbb{K}$ est le second membre de l'équation;*
- *et $\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ sont les inconnues.*

Vocabulaire

- Tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant cette équation est une solution de l'équation.
- L'équation est dite homogène lorque $b = 0$. L'équation homogène associée à (E) est l'équation

$$(E_0) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$$

Exemple

- $3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0$ est une équation homogène à quatre inconnues. Remarquez que x_3 figure bien dans l'équation, mais avec un coefficient nul. Le nombre d'inconnues doit être précisé dans le problème, puisqu'il n'apparaît pas explicitement dans l'équation. Ici, par exemple, il faut préciser que l'on résoud l'équation dans $\mathbb{K}^4$.
- l'équation définie dans $\mathbb{R}^3$ $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$ admet pour solution $(1, 1, -2)$.
- dans le cas d'équations à 3 inconnues, on note souvent ces inconnues x, y et z (ex : $3x + 2z - 4z = 7$). Dans $\mathbb{K}^4$, la quatrième inconnue est souvent notée t.

Définition 1.3 — Système d'équations linéaires

Un système de n équations linéaires à p inconnues est la donnée de n équations linéaires

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

où les scalaires $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *sont les coefficients, les scalaires* $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *forment le second membre et les* $\left(x_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *sont les inconnues du système.*

Pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, la i–ième équation se note simplement L_i.

Vocabulaire

– Une solution du système (Σ) est un élément $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément toutes les équations $L_1, L_2, \ldots, L_n$.
– Le système (Σ) est homogène si et seulement si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Le système homogène associé à (Σ) est le système (Σ') obtenu en annulant le second membre de (Σ).
– Le système est carré si et seulement si $n = p$ (autant d'inconnues que d'équations).

Définition 1.4 — Systèmes équivalents
Soit (Σ_1) *et* (Σ_2) *deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues. Les systèmes* (Σ_1) *et* (Σ_2) *sont équivalents si et seulement si ils admettent le même ensemble de solution.*

Par exemple, dans $\mathbb{K}^3$,

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right.$$

Notez que deux systèmes équivalents peuvent ne pas avoir le même nombre d'équations. L'essentiel de ce chapitre est consacré à une méthode de résolution systématique des systèmes d'équations. Cette méthode est basé sur l'utilisation judicieuse des opérations élémentaires que nous allons voir maintenant.

II — Systèmes échelonnés

Définition 2.1 — Inconnues principales et auxiliaires – pivots
Soit une équation linéaire à p inconnues

$$(E) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

On appelle inconnue principale de l'équation l'inconnue de plus petit indice dont le coefficient est non nul. Ce coefficient s'appelle le pivot de l'équation et les autres inconnues sont les inconnues auxiliaires.

Définition 2.2 — Système échelonné
Un système de n équations à p inconnues est échelonné si et seulement si l'indice de l'inconnue principale augmente strictement d'une ligne à l'autre. Les coefficients des dernières équations peuvent éventuellement être tous nuls.

Par exemple, dans $\mathbb{K}^4$, le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

est échelonné, mais pas

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Résolution des systèmes échelonnés Trois cas de figures se présentent :

1. Si il y a une ligne de la forme « $0 = b_j$ » avec $b_j \neq 0$, alors le système ne peut pas avoir de solutions : il est dit incompatible.
2. Sinon le système est compatible. On peut le résoudre par la méthode de la remontée. Dans chaque équation, en partant de la dernière, on exprime l'inconnue principale en fonction du second membre et d'éventuelles inconnues auxiliaires.
   (a) S'il y a au moins une variable auxiliaire, celle-ci varie librement dans $\mathbb{K}$ et le système admet donc un nombre infini de solutions : il est dit indéterminé.
   (b) Si il n'y a pas de variable auxiliaire, alors toutes les inconnues reçoivent une unique valeur. Le système admet donc une unique solution : il est dit déterminé.

III — Méthode de résolution : pivot de Gauss

III.1 — Opérations élémentaires sur les lignes

On va effectuer des opérations sur les lignes d'un système (Σ) qui transforme (Σ) en un système équivalent.
Ce n'est pas le cas de toutes les opérations. Par exemple « remplacer deux lignes par leur somme »

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

n'est pas une opérations intéressante.
Un opération est intéressante s'il est possible de revenir au système de départ par une autre opération (qui en est donc la réciproque).
Les opérations élémentaires sont les suivantes :

- **Permuter deux lignes ($L_i \longleftrightarrow L_j$).** L'opération réciproque est elle même.
- Changer l'ordre des lignes (pas de notation). On peut montrer que cette opération est une succession de permutation de deux lignes.
- **Multiplier une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$).** L'opération réciproque est alors $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$.
- Additionner deux lignes ($L_i \leftarrow L_i + L_j$). La réciproque est $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
- **Additionner à une ligne une autre ligne multipliée par une constante ($L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).** L'opération réciproque est $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$.
- Additionner à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. Cela revient à faire plusieurs opérations du type précédent.
- **Supprimer une équation « $0 = 0$ ».**
- Supprimer une équation présente en double.
- Supprimer une équation qui est une combinaison linéaire des autres.

Les opérations en gras sont les opération élémentaires à proprement parler ; les autres sont des enchaînements « sûrs » d'une ou plusieurs opérations élémentaires.

III.2 — Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet, par une succession d'opérations élémentaires, de transformer une système de p équations à n inconnues (Σ) en système échelonné équivalent.

Élimination de x_1 Si x_1 n'apparaît dans aucune équation, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_1 et on l'amène en premier dans le système.

À l'aide de L_1, on élimine x_1 dans les autres équations L_2, L_3, ..., jusqu'à L_n avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

On obtient ainsi un système où seule L_1 contient l'inconnue x_1.

Élimination de x_2 *On ne touche plus aux lignes contenant x_1 dans la suite de la méthode.*
Si x_2 n'apparaît dans aucune équation restante, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_2 et on l'amène en second dans le système.

À l'aide de L_2, on élimine x_2 dans les autres équations avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_2$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

etc. et ainsi de suite. On élimine successivement les inconnues x_1, x_2, etc. jusqu'à x_p en « gelant » progressivement les premières lignes du système.

La méthode s'arrête nécessairement sur un système échelonné.
À la première étape on sélectionne d'abord dans la première colonne un coefficient non nul.

$$\begin{cases} 3y + 2z + t = 1 \\ \boxed{2}x + 4y + 6z = 2 \\ x - y + 2z - t = 3 \\ 5x + y + 9z - 3t = 4 \end{cases}$$

On amène l'équation correspondante à la première place.

$$\begin{cases} \boxed{2}x + 4y + 6z \quad = 2 \\ 3y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z - t = 3 \\ 5x + y + 9z - 3t = 4 \end{cases}$$

À l'aide de ce premier pivot, on annule les coefficients de la première inconnue dans les autres équations. On utilise pour cela des opérations du type $L_i \leftarrow \alpha L_i - \beta L_1$, avec $\alpha \neq 0$. Notez bien qu'on utilise la première ligne et qu'on opère sur les autres lignes.
Dans l'exemple, on va faire $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1$ pour trouver

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3y + 2z + t = 1 \\ -6y - 2z - 8t = 4 \\ -18y - 12z - 6t = -2 \end{cases}$$

On commence maintenant la seconde étape du calcul : on répète le même travail pour éliminer les coefficient devant y à partir de la troisième ligne. Attention : on ne touche plus à la première ligne ! Ici on va faire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 6L_2$.

On aboutit ainsi, de proche en proche, à un système échelonné. Ici

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2z-6t=6 \\ 0=4 \end{cases}$$

qui est incompatible.
Si le second membre de la dernière équation avait été 2, on aurait obtenu

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2z-6t=6 \end{cases}$$

Ce système est compatible. Par la méthode de la remontée on trouve comme ensemble de solutions $S=\{(2+5t,-5-7t,3+3t,t),\, t\in\mathbb{K}\}$.

Théorème 3.1 — *Quelque soit les opérations effectuées dans la méthode du pivot de Gauss, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant : c'est le rang du système (Σ).*

DÉM. Résultat admis. Il sera justifié dans le chapitre sur les applications linéaires. □

Remarquez que les opérations effectuées dans la méthode du pivot ne dépendent que des coefficients du système, et pas du second membre.
En particulier le rang d'un système ne dépend que des coefficients du système, et pas du second membre.

III.3 — Résumé de la méthode

Soit (Σ) un système. Par application du pivot de Gauss, on calcule un système échelonné équivalent. Le système echelonné obtenu peut être

- incompatible : dans ce cas (Σ) est incompatible, il ne possède pas de solutions.
- compatible alors (Σ) possède soit une infinité de solutions (cas où il y a des variables auxiliaires) soit une seule solution (cas ou il reste autant d'équations que d'inconnues).

III.4 — Cas particuliers d'usage fréquent

Système homogène Un système homogène possède toujours au moins une solution, à savoir $x_1 = \cdots = x_p = 0$; il est donc toujours compatible.

Système carré Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un système de Cramer.

Système de Cramer Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un système de Cramer.

Système triangulaire C'est un système carré de la forme

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots = \cdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Attention ! Les coefficients diagonaux a_{11}, a_{22}, etc. sont éventuellement nuls.

Théorème 3.2 — *Un système triangulaire est un système de Cramer si et seulement si il n'a aucun zéro sur la diagonale.*

DÉM. Si ce système n'a aucun zéro sur la diagonale, alors on peut le résoudre par la méthode de la remontée et on trouve une unique solution.
Supposons qu'il a un zéro sur la diagonale, par exemple sur la première ligne. Dans ce cas le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{r} a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots = \cdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Comme x_1 ne figure pas dans ce système, c'est une variable auxiliaire qui prend librement ses valeurs dans $\mathbb{K}$. Ainsi le système n'est pas de Cramer.
Notez qu'il peut éventuellement ne pas avoir de solutions, par exemple si $a_{nn} = 0$ mais que $b_n \neq 0$.
Si c'est un autre coefficient diagonal qui est nul, par exemple a_{kk} alors x_k est une variable auxiliaire, x_k varie librement dans $\mathbb{K}$ et le système n'est donc pas de Cramer. □