Suites numériques

BCPST 1 — 2020/2021

Suites classiques

Exercice 1

Donner le terme général et étudier la convergence de suites définies par

1. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_n$;
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$;
3. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$;
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}$;
5. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}$.
6. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -4u_n + 15$.

Exercice 2

Donner le terme général des suites vérifiant les relations de récurrences suivantes, sachant que $u_0 = u_1 = 1$:

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$;
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$;

Exercice 3

On cherche le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 25, u_1 = 31$ et

$$\forall n \in [\![2 \ ; +\infty [\![, \quad u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1.$$

1. Chercher une suite particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $\left(an^2 + bn + c\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (mais pas nécessairement les conditions initiales).
2. Quelle relation vérifie la suite $(u_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

1. On pose $u_0 = 1, v_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

   Déterminer u_n et v_n en fonction de n en établissant une relation de récurrence d'ordre 2 sur u et sur v.

2. On pose $a_0 = 1$ et $a_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 b_n} \end{cases}$$

   Vérifier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Les expliciter en fonction de n et déterminer leurs limites respectives.

Exercice 5

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

INDICATION : *On pourra définir et étudier la suite $v_n = \ln(u_n)$.*

Exercice 6 — *Pas classiques, mais à savoir faire.*

1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + n^2$.
2. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$.
3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$.
4. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2^n u_n$.

★ **Exercice 7** — *À comprendre*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^n + \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
2. Déterminer le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$. En déduire que $u_n \in \,]0\ ;1[$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire la monotonie de u, puis sa convergence. Quelle est sa limite ?

Convergence

Exercice 8

Vrai ou faux ?

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 2, alors elle converge vers 2.
2. Le produit de deux suites minorées est une suite minorée.

3. Si $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. Si u et v sont deux suites bornées alors uv est une suite bornée.
5. Si u et v sont deux suites, si u et uv sont bornées, alors v est bornée.
6. La suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7. Toute suite convergente est monotone.
8. Toute suite monotone est convergente.
9. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9

Quel est le plus grand terme de la suite définie par

1. $u_n = -3n^2+19n-28$;
2. $u_n = \dfrac{(3{,}5)^n}{n!}$;
3. $u_n = \dfrac{6^n}{n!}$.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer que si u est convergente alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Théorème d'encadrement

Exercice 11

À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 12

Montrer que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

En déduire le comportement de la suite de terme général $\quad u_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 13

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Convergence et limite éventuelle des suites définies par

$$(1)\quad u_n = \frac{\lfloor nx\rfloor}{n};\quad (2)\quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor;$$

$$(3)\quad u_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{\lfloor 3^n x\rfloor}.$$

Exercice 14

Étude de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Démontrer que
$$\forall x\in[\,0\,;1\,],\quad x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x$$
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Limite et équivalent ?

Exercice 15 — *Série harmonique*

1. Démontrer que
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad \frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$$
2. Montrer que
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{1}{k+1}\leqslant \ln(1+k)-\ln(k)\leqslant \frac{1}{k}$$
3. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.
À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant \ln(n+1)+\frac{n}{n+1}$$
4. Étudier alors la convergence de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Démontrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 16 — *Moyenne arithmético-géométrique*

Soit a et b deux réels positifs tels que $0<a<b$. On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0 = a,\ v_0 = b,$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. a) Montrer que
$$\forall (x,y)\in{\mathbb{R}_+}^2,\ \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$$
b) Montrer par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant b.$$
c) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

d) On note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$. Justifier avec soin que $0 < l \leqslant l'$.

2. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} - u_{nr+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2.$$

puis que

$$l' - l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l'} - \sqrt{l}\right)^2.$$

b) Montrer que si $l \neq l'$ alors $\sqrt{l'} + \sqrt{l} = \frac{1}{2}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})$.

c) En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que $l = l'$.

On appelle la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la moyenne arithmético-géométrique de a et b*.

3. a) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = 0$ et $b > a$? Quelles sont leurs limites ?

b) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = b$? Quelles sont leurs limites ?

Exercice 17

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

En déduire la convergence et la limite de $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Calculs de limite

Exercice 18

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
2. $b_n = \frac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n}$;
3. $c_n = \frac{n^2 - 6n + 3}{n^4 + 2n}$;
4. $d_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$;
5. $e_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$;
6. $f_n = \sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 19

À l'aide d'équivalents, calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$;
2. $c_n = \frac{1}{n}(\cos(1/n) - 1)^{-1}(\sqrt[3]{1 + 1/n} - 1)$;
3. $d_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$;
4. $e_n = \frac{e^{1/\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}$;
5. $f_n = \frac{(\ln n)^2 + \sqrt{n^2+1}}{\cos(n!) + n^2}$;
6. $g_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}}$;
7. $l_n = \sqrt{2n+1} + 2n + \ln n$
8. $m_n = \frac{\exp(\sin(1/n)) - 1}{(1/2)^n + n^2}$;
9. $r_n = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin(1/n)} - e^{1/3n}}{\sin(1/n) + \tan(1/n)}$.

Suites adjacentes

Exercice 20

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

$$\forall n \in [\![3\ ;\ +\infty [\![,\ \ u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1},$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

Exercice 21

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en montrant que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2},\quad u_n = S_{2n},\quad v_n = S_{2n+1}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de sa limite.

Exercice 22

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 23

1. Vérifier que la formule $f(x) = \dfrac{-x+18}{3x+2}$ définit une fonction de l'intervalle $[\,0\,;\,9\,]$ dans lui-même.
2. Montrer que la suite u définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie
3. a) Montrer que la suite v donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$
est bien définie.
   b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   c) En exprimant u_n en fonction de v_n, donner une expression de u_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la série de terme général u_n.

Exercice 24

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle majorée ?

Exercice 25

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Exercice 26

Étude de la suite définie par
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$$

Exercice 27

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.
2. $u_1 = 1,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.
3. $u_0 \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-u_n}$. (Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$)

Exercice 28

Étude de la suite définie par
$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}$$

1. Étudier la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les points fixes de f.
3. On pose $g = f \circ f$.
   a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g \circ g(x) - x = -\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$.
   b) On suppose $u_0 \in [0\,;\,1[$. En déduire la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer alors que u est convergente.
   c) Traiter le cas $u_0 \in [1\,;\,+\infty[$.

Exercice 29

On fixe deux nombres réels a et b supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$.
   b) Montrer que la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4.
2. On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire, à savoir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.
   a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   b) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
   c) En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$$
   d) On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$
Démontrer $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leqslant x_n$.
   e) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★ **Exercice 30**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un polygone régulier à 3×2^n coté inscrit dans le cercle unité. On note p_n son demi–périmètre et u_n la demi–longueur d'un coté. Donc $p_n = 3 \times 2^n \times u_n$.

1. Montrer que, pour $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\sin^2\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin\dfrac{\pi}{3\times 2^n}$ et que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.
3. a) Démontrer que
$$\forall x \in [\,0\,;1\,],\qquad \sin(x) \leqslant x$$
puis que
$$\forall x \in [\,0\,;1\,],\qquad |\sin(x)-x| \leqslant \frac{x^3}{6}$$
   b) En déduire une majoration $|p_n-\pi|$. Que pouvez-vous dire de la vitesse de convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-u_n^2}\right)}$$
En déduire une méthode de calcul approché de π.

Étude de suites

Exercice 31

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 32

Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0+u_1+\cdots+u_n)$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 33

Étude de la convergence de la suite de terme général $u_n = \lfloor a^n \rfloor^{1/n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 34

Soit u la suite de terme général
$$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n+2)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k)}$$

1. Étudier la monotonie de u et en déduire que u est convergente.
2. Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.
Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$. Quel est la limite u ?

★ **Exercice 35**

À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$ converge vers 2.

Exercice 36

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, convergente et que sa limite ℓ est dans $[\,1/2\,;1\,]$.

Exercice 37

On pose $u_0 = -1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2+2^{-n}}\right)$$

1. Étudier la monotonie de u.
2. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_{n+1}-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{-n}$$
3. En déduire que u converge.

Exercice 38

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$u_1 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\qquad u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1. Démontrer que cette suite est majorée par 3.
2. Démontrer qu'elle est monotone.
3. Quelle est sa limite ?

Divers

Exercice 39

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Démontrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 40

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers 0, telle que $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. Montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
   INDICATION : *On pourra observer $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.*
2. Et si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ?
   INDICATION : *On pourra observer $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.*

Exercice 41

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme

$$P_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine positive x_n et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Calculer $P_{n+1}(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera ℓ sa limite.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. En déduire que $\ell = \frac{1}{2}$.
4. On pose $u_n = x_n - \frac{1}{2}$. Montrer que pour $n > 1$, $0 < u_n < \frac{1}{2^n}$.
5. Montrer que $u_n = \frac{1}{2^{n+2}}(1 + 2u_n)^{n+1}$ et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}$.