

Nombres réels

BCPST I— 2020

Équations

Exercice 1

Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m , les équations ou inéquations

1. $(m+1)x + 2 - m = 0$;
2. $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2}$;
3. $\sqrt{2x+m} \geq x+1$.

Exercice 2

Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels a , b et c , l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;
2. $(E_2) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
3. $(E_3) : (\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$
4. $(E_4) : \ln x + \ln(5-x) = -2$
5. $(E_5) : \sqrt{x^2-3} = 5x-9$
6. $(E_6) : x = \sqrt{x} + 2$
7. $(E_7) : e^{2x} + 3e^x - 1 = 0$
8. $(E_8) : e^x + e^{-x} = 2$
9. $(E_9) : e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4 = 0$
10. $(E_{10}) : \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$
11. $(E_{11}) : \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$

Exercice 4

Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \frac{1}{4x-1} < \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $(I_2) : \frac{2x+1}{x+1} < \frac{3x-2}{x+1}$
3. $(I_3) : 5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$
4. $(I_4) : \ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$
5. $(I_5) : \sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$

Exercice 5

Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2}$
2. $(I_2) : x+1 > \sqrt{x^2+2x}$

3. $(I_3) : \ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} ,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} (x étant l'inconnue)

1. l'équation $\sqrt{4-x} = 3-2x$;
2. l'inéquation $\sqrt{4-x} < 3-2x$;
3. l'inéquation $\sqrt{4-x} > 3-2x$.

Expression du second degré

Exercice 8

Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation

$$(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$$

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations

1. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |x-2|$;
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geq x-2$;
3. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$;
4. $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$.

Exercice 10

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leq m-x$.

Exercice 11

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Exercice 12

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [a; b], \quad (a-x)(x-b) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Montrer que, pour $(x, y) \in [a; b]^2$,

$$\min \{(x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\} \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

INDICATION : On pourra raisonner par l'absurde.

Inégalités

Exercice 13

1. À quel ensemble appartient $1/x$ lorsque $-4 < x < 5$?
2. Pour quelles valeurs entières de n a-t-on $n^2 - 3n + 2 > 0$?
3. À quels ensembles appartiennent x^2 et x^3 lorsque $x \geq -2$?
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x \geq x^2$? Et $x^2 \geq x$?

Exercice 14

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(i, j) \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$x^i + x^j \geq 2x^{\frac{i+j}{2}}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k \geq (2n+1)a^n$$

Exercice 15

1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

2. Calculer la partie entière de $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Exercice 16

Montrer que

$$\forall a \in [0; +\infty[\quad \forall b \in [1; +\infty[\quad (1+a)^b \geq 1+ab$$

$$\forall a \in [0; +\infty[\quad \forall b \in [0; 1] \quad (1+a)^b \leq 1+ab$$

Exercice 17

Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

1. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$;
2. $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Partie entière

Exercice 18

Soient x et y deux nombres réels. Montrer

1. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$;
2. $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$ si x et y sont positifs;
3. $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \geq \lfloor xy \rfloor$ si x et y sont négatifs.

Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Exercice 19

Trouver les réels x tels que $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$.

Exercice 20

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x $\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2$.

Exercice 21

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Montrer qu'il peut ne pas y avoir égalité.

Exercice 22

Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Calcul polynomial

Exercice 23

Simplifier

1. $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$;
2. $\frac{y^2+7y+10}{y^2-25}$;
3. $\frac{a^2+5a-14}{a^2-4a-21}$;
4. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

Exercice 24

1. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{4x+1}{x^2-x-2}$$

2. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}, \quad \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z+2} = \frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$

3. Quelle est la valeur de a tel que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, -2\}$,

$$\frac{a}{2x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

