Logique, ensembles et applications

BCPST 1 — 2021/2022

I — Syntaxe ②

II — Assertion, proposition ②

Définition 2.1 — Assertion ②

III — Connecteurs logiques ②

Définition 3.1 — Négation ②

Définition 3.2 — « et », « ou » ②

Théorème 3.3 — Formules de De Morgan ②

Théorème 3.4 — Commutativité, associativité, distributivité ③

Définition 3.5 — implique, équivalente ③

Définition 3.6 — Contraposée ③

Théorème 3.7 — Contraposée ③

IV — Prédicats ④

Définition 4.1 — Prédicat ④

V — Quantificateurs : $\forall$, $\exists$ ④

Définition 5.1 — Trois quantificateurs ④

VI — Méthodes de démonstration ④

Théorème 6.1 — Principe de récurrence simple ⑤

Théorème 6.2 — Principe de récurrence double ⑤

I — Syntaxe

II — Assertion, proposition

Définition 2.1 — Assertion
Une ***assertion*** *est une phrase mathématique syntaxiquement correcte et à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : «* ***Vrai*** *» (V) ou «* ***Faux*** *» (F).*

III — Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de construire des propositions complexes en partant d'autres propositions. La valeur de vérité du résultat est établi univoquement en fonction des valeurs de vérités des propositions de départ.Cette construction est purement formel et n'a pas toujours un sens précis.

Définition 3.1 — Négation
Soit P une proposition logique. La proposition $\boldsymbol{(\text{non } P)}$ *est une proposition syntaxiquement correcte, qui a par définition la valeur de vérité*

P	non P
V	F
F	V

Définition 3.2 — « et », « ou »
Soit P et Q deux propositions logiques. Les propositions $\boldsymbol{(P \text{ et } Q)}$ *et* $\boldsymbol{(P \text{ ou } Q)}$ *sont syntaxiquement correctes. Elles ont par définition les valeurs de vérité*

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Théorème 3.3 — Formules de De Morgan

1) *« non $(P$ et $Q)$ » a la même valeur de vérité que « $($non $P)$ ou $($non $Q)$ »;*
2) *« non $(P$ ou $Q)$ » a la même valeur de vérité que « $($non $P)$ et $($non $Q)$ ».*

Théorème 3.4 — Commutativité, associativité, distributivité
Soit P, Q et R trois propositions.

- ***associativité** de « et » :*

$$P \text{ et } (Q \text{ et } R) \qquad \text{a la même valeur de vérité que} \qquad (P \text{ et } Q) \text{ et } R$$

  On les note simplement « P et Q et R » ;
- ***associativité** de « ou » :*

$$P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \qquad \text{est identique à} \qquad (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$$

  On les note simplement « P ou Q ou R » ;
- ***distributivité** de « et » sur « ou » :*

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \qquad \text{a la même valeur de vérité que} \qquad (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$$

- ***distributivité** de « ou » sur « et » :*

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \qquad \text{a la même valeur de vérité que} \qquad (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$$

Définition 3.5 — implique, équivalente
Soit P et Q deux propositions.

- *« P implique Q » : L'assertion « $\boldsymbol{P \implies Q}$ » est par définition « $\boldsymbol{(\text{non } P) \text{ ou } Q}$ »*
- *« P est équivalente à Q » :*
  L'assertion « $\boldsymbol{P \iff Q}$ » est l'assertion « $\boldsymbol{(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)}$ ».

Définition 3.6 — Contraposée
*La **contraposée** de l'implication « $P \implies Q$ » est « non $Q \implies$ non P ».*

Théorème 3.7 — Contraposée
Deux contraposées ont même valeurs de vérité.

Proposition 3.8 — Négation d'une implication
La négation de « $P \implies Q$ » est « P et (non Q) ».

IV — Prédicats

Définition 4.1 — Prédicat

*Un **prédicat** est une assertion dans laquelle figure un ou plusieurs symboles que l'on peut **substituer** par d'autres.*

En substituant aux symboles des constantes, on obtient une proposition syntaxiquement correcte. On peut alors tenter d'en déterminer la valeur de vérité.

V — Quantificateurs : $\forall$, $\exists$

Définition 5.1 — Trois quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat à une variable x définie sur un ensemble donné E. Nous pouvons construire trois nouvelles assertions

1. « $\boldsymbol{\forall x \in E, \quad P(x)}$ » *qui signifie* « $x \in E \implies P(x)$ »
   Sémantique : Cette assertion est vraie dans le cas où le prédicat $P(x)$ est vrai pour toute les valeurs de la variable x prises dans l'ensemble E.
2. « $\boldsymbol{\exists x \in E, \quad P(x)}$ » *qui signifie que* « non ($x \in E \implies$ non $P(x)$) ».
   Elle est donc définie comme la négation de « $\forall x \in E$ non $P(x)$ », c'est-à-dire que le prédicat « non $P(x)$ » est faux pour au moins une valeur de x.
   Sémantique : Cette assertion est vraie dans le cas où le prédicat $P(x)$ est vrai pour au moins une valeur de la variable x prise dans E.
3. « $\boldsymbol{\exists! x \in E, \quad P(x)}$ » *Cette assertion est vraie dans le cas où le prédicat $P(x)$ est vraie pour une unique valeur de la variable x.*
   Elle est formellement équivalente à

$$(\exists x \in E, \quad P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall (x,y) \in E, \quad [(P(x) \ \text{et} \ P(y)) \implies x = y])$$

Proposition 5.2 — Négation des quantificateurs

1) La négation de « $\forall x \in E, \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E, \quad (\text{non } P(x))$ ».

2) La négation de « $\exists x \in E, \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E, \quad (\text{non } P(x))$ ».

VI — Méthodes de démonstration

Démontrer une proposition P consiste à utiliser des axiomes de la théorie, des théorèmes et des règles d'inférence pour établir la valeur de vérité de P.

Raisonnement par induction

$$\begin{array}{lll} & P & \text{VRAI} \\ & P \implies Q & \text{VRAI} \\ \hline \text{donc} & Q & \text{VRAI} \end{array}$$

Notez la différence entre $\Longrightarrow$ et « donc ».

Calcul On transforme une proposition à l'aide des transformations syntaxiques permises par la théorie, parmi lesquelles :

1. les théorèmes et définition de logique (formule de De Morgan, contraposées, etc.) ;
2. les règles du calcul algébriques (concernant l'égalité, les inégalités, etc.) .

Et c'est à peu près tout.

Raisonnement par l'absurde

$$\begin{array}{rcl}
 & P & \text{VRAI} \\
 & Q & \text{FAUX} \\
 & P \text{ et } (\text{non } Q) \implies \mathit{FAUX} & \text{VRAI} \\
\hline
\text{donc} & P \text{ et } (\text{non } Q) & \text{FAUX} \\
\text{identique à} & P \implies Q & \text{VRAI}
\end{array}$$

Disjonction des cas Considérons un prédicat défini sur un ensemble E. Si c'est ensemble E est l'union de deux de ses sous-ensembles $E = A \cup B$, alors on peut transformer une proposition de la forme

$$\forall x \in E, \qquad P(x)$$

en

$$(\forall x \in A, \qquad P(x)) \text{ et } (\forall x \in B, \qquad P(x))$$

Il s'agit maintenant de démontrer chacune de ces deux propositions.

THÉORÈME 6.1 — **Principe de récurrence simple**
Soit une assertion $H(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. *Si $H(0)$ est vraie ;*
2. *si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a « $H(n) \implies H(n+1)$ » vraie ;*
3. *alors « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n)$ » est vraie.*

THÉORÈME 6.2 — **Principe de récurrence double**
Soit une assertion $H(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. *Si $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies ;*
2. *si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, « $(H(n-1) \text{ et } H(n)) \implies H(n+1)$ » ;*
3. *alors « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n)$ » est vraie.*