Calcul intégral

BCPST 1 — 2020/2021

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

I — Primitive d'une fonction

Définition 1.1 — Primitive d'une fonction
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que F est une **primitive** *de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F_0, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant une primitive. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 1.4 — Existence d'une primitive d'une fonction continue
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Alors f admet une primitive sur I.

II — Intégrale d'une fonction continue

Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue
Soit $(a, b) \in I^2$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une de ses primitives.
Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie, on l'appelle ***intégrale de f entre a et b*** *et on le note*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf.}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse
Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.
La fonction

$$F_a \ : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

II.1 — Relation avec l'aire

Lien aire-intégrale On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ orienté muni d'un repère orthonormé direct.
Soient deux réels a et b quelconques, f une fonction continue définie entre a et b. Soit les points $A(a,0)$, $B(b,0)$, $B'(b,f(b)$ et $A'(a,f(a))$.
Le domaine orienté $\mathscr{I}_f$ est délimité par le segment $[AB]$, puis le segment $[BB']$ puis la portion de la courbe représentative de f comprise entre B' et A' et enfin par le segment $[A'A]$.

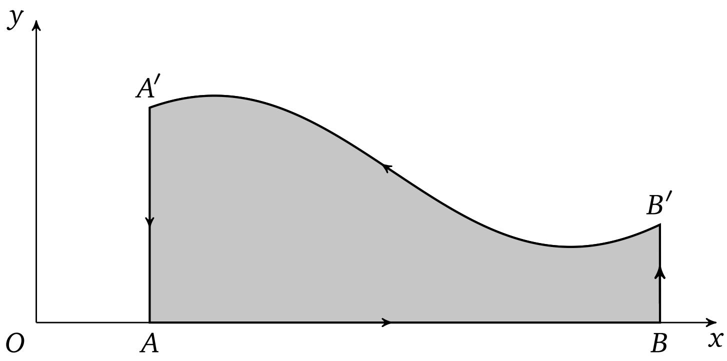

FIGURE 1 — *Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

Par définition **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{I}_f$ est l'intégrale entre a et b de f :

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{I}_f\right) = \int_a^b f$$

III — Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 — Relation de Chasles
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I.

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

$$\int_a^a f = 0 \qquad et \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Corollaire 3.2 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\,a\,;\,b\,]^n$.*

On a
$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

Propriété 3.3 — Linéarité de l'intégrale
Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I, et donc*
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$
- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I, et donc*
$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Corollaire 3.4 — *Soit $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ n fonctions continues sur I.*

On a
$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $(a, b) \in I^2$.
Si $a \leqslant b$ *et si* f *est positive alors* $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
Si, de plus, $a \neq b$ *et* $\int_a^b f = 0$ *alors* f *est nulle entre sur* $[\, a\ ;\ b\,]$.

Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.*

$$\text{Si } a \leqslant b \quad \text{et si} \quad f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Corollaire 3.7 — *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $(a, b) \in I^2$.

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

IV — Méthodes de calcul d'intégrales

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire
Soit u *une fonction de classe* C^1 *sur* I*, qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors (sous réserve d'existence)*

- *pour* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, u^{n+1} *est une primitive de* $-(n+1)u'u^n$ *sur* I *;*
- $1/u$ *est une primitive de* $-u'/u^2$ *sur* I *;*
- $\ln|u|$ *est une primitive de* u'/u *sur* I.

Théorème 4.2 — Intégration par parties
Soient u *et* v *deux fonctions de classe* C^1 *sur* I *et* $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v$$

Propriété 4.3 — *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $u : J \longrightarrow I$.
Si f *et* u *sont de classe* C^1 *alors la fonction* $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u'(x)f'(u(x)) \end{array} \right.$ *admet pour primitive la fonction* $f \circ u$.

Théorème 4.4 — Changement de variables – I
Soit $(a,b) \in I^2$, u une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle $u\langle I\rangle$. On a l'égalité

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 4.5 — Changement de variables – II
Soit $(a,b) \in I^2$, f une fonction continue sur I. Soit u une fonction définie sur $[\,a\,;\,b\,]$, de classe C^1 sur cet intervalle et strictement monotone. On a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 4.6 — *Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

- *Si f est paire et si $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$;*
- *si f est impaire et si $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$;*

V — Calcul approché d'intégrale

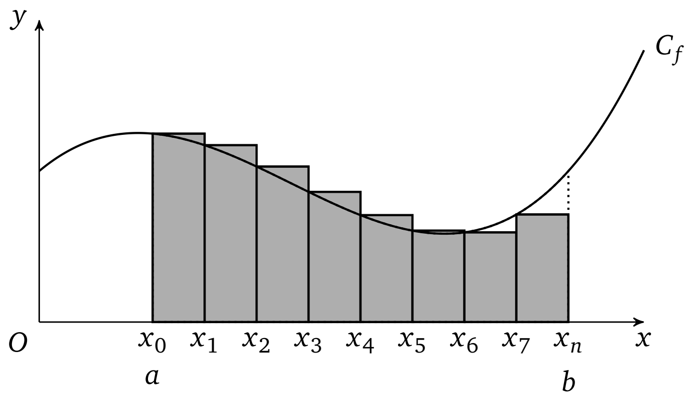

FIGURE 2 — *Méthode des rectangles à gauche :* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ soit la suite $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ définie par $\forall i \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, , $\quad x_i = a + (b-a) \times \dfrac{i}{n}$. On considère la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

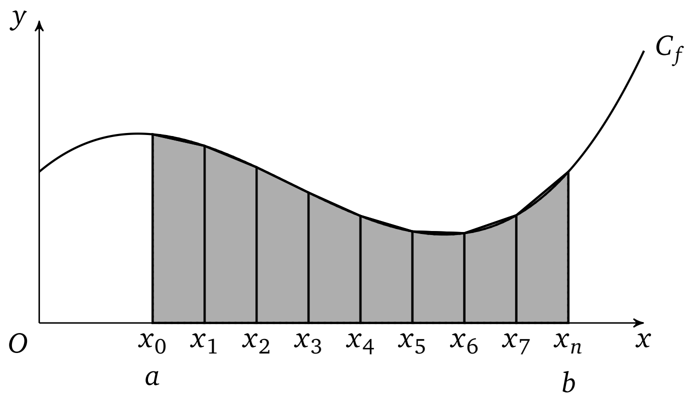

FIGURE 3 — *Méthode des trapèzes* $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2}\Big[f(x_k)+f(x_{k+1})\Big]$

Proposition 5.1 —

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut aussi poser

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{somme de Riemann à droite}$$

ou encore

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{méthode du point milieu}$$

Définition 5.2 — Valeur moyenne d'une fonction
Soit $f\ :\ [\,a\ ;\ b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\textit{valeur moyenne de } f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Cette définition est justifiée par la méthode des rectangles. En effet, une définition intuitive de la moyenne d'une fonction serait la valeur, « pour n grand » de la somme

$$\frac{f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(b)}{n+1}$$

Or, justement, en utilisant le résultat précédent, cette somme tend vers $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ lorsque n tend vers $+\infty$.

V.1 — Sommes de Riemann

Théorème 5.3 — Somme de Riemann à gauche
Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$$

On peut également parler de somme de Riemann à droite :

Théorème 5.4 — Somme de Riemann à droite
Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$$