Intégration

BCPST 1 — 2020/2021

Calculs plus ou moins subtils

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 nx^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (x+1)^n \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 (2x+1)^n \,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^n} \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 x^{n/2} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 3x^2+2x+1 \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 3(x+2)(x-5) \,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties. Préciser l'ensemble de valeurs de x.

1. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}\, t \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x \ln(1+\cos x) \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \sin(t) \,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^x t \ln t \,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^x t \sin(t) \,\mathrm{d}t$

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions suivantes, en utilisant un changement de variables. Préciser à chaque fois un domaine de validité.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ avec $t = x/a$;
2. $x \mapsto x^2 \ln(x^6-1)$ avec $u = x^3$;
3. $x \mapsto \cos^3 x$ avec $\sin x = u$;
4. $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ avec $u = x^2$.

Exercice 4

Calculer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{t^2+3}{(t+1)^4} \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4} \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^7+1)}$
4. $\displaystyle\int \sin t \cos^5 t \,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}(t^{1/2}) \,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ (poser $t = \tan u$)
7. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \,\mathrm{d}x$ (Poser $u = x(x+1)$.)
8. $\displaystyle\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}$)
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$
10. $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\, x \,\mathrm{d}x$

★ **Exercice 5**

Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_3^4 \frac{2x-4}{x^2-3x+2} \,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{\pi/4} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_0^1 a^{3x}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, \mathrm{e}^{\cos x} \,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \,\mathrm{d}x$$

$I_9 = \int_0^{\pi/4} x(\tan^2 x + \tan^4 x) \,\mathrm{d}x$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$ (Poser $u = \sin x$.)
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2t} \ln(1+\mathrm{e}^t) \,\mathrm{d}t$ (Poser $u = \mathrm{e}^t$.)
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (Poser $t = \tan(x/2)$.) En déduire $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ (Poser $x = \tan t$.)

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$ (Utiliser $\dfrac{2u^2+u+1}{u(u^2+1)} = \dfrac{a}{u}+\dfrac{bu+c}{u^2+1}$ pour a, b, c bien choisis.)

Exercice 7

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$. Donner une primitive de f sur $]1\,;5[$.
   On trouvera deux réels a et b tels que
   $$\forall x \in]1\,;5[,\quad \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-5}$$
2. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x^2-5x-6}$.

Fonctions définies par morceaux

Exercice 8

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left\lfloor 4x+\frac{1}{2}\right\rfloor dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sup\left(x,(x-1)^2\right)\,dx$.

Exercice 9

On considère la fonction
$$f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \cos x & \text{sinon} \end{cases}\end{array}\right. .$$
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. En expliciter la primitive qui s'annule en 1.

Exercice 10

Soit
$$f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\cos x}{e^x} & \text{sinon.} \end{cases}\end{array}\right.$$
Démontrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Calculer ces primitives.

Exercice 11

Expliciter une primitive de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Astuces diverses

Exercice 12

Soient a, b, c, d quatre réels. Soient les primitives
$$I = \int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$
$$J = \int \frac{\cos x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$
$$K = \int \frac{\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$

1. Calculer $cJ + dK$ et $dJ - cK$.
2. En déduire J et K, puis I.

Exercice 13

1. Soit à calculer
   $$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{\sin x}\,dx, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   Calculer $I_{n+1} - I_n$. En déduire la valeur de I_n pour tout n.
2. Reprendre la question précédente avec
   $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx$, $(n \in \mathbb{N})$

Exercice 14

Montrer que
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\,dx$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$.

Intégrale et inégalités

Exercice 15

Soit $I = \displaystyle\int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}\,dx$. En encadrant $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{a^2-x^2}}$, calculer $\lim\limits_{a\to 0} I$.
Réponse : π

Exercice 16

1. Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $u_n \sim \ln n$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Soit $v_n = u_n - \ln n$. Montrer que v_n est bornée, puis étudier sa monotonie. Que peut on dire de v_n ?

Exercice 17
Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$.
Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 18
Soit a et b dans $[0 ; \pi/2[$. Démontrer que

$$\int_a^b \frac{1}{\cos x \sin x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\tan b}{\tan a}\right)$$

Exercice 19 — *Étude de $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.*

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
2. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln 2)\,\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant (\ln 2)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

3. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ et $x > 0$. Même question lorsque $x \to 0$ et $x < 0$.
4. Peut on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, étudier la dérivabilité du prolongement de f en 0.
5. Étudier les branches infinies de f. Tracer schématiquement son graphe.

Exercice 20
Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.
Indication : *Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ et en déduire un encadrement de l'intégrale.*

Exercice 21
Soit $g : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array}$

1. Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le comportement asymptotique de g en $+\infty$.

Exercice 22
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$. Calculer G en fonction de g.
   Indication : *Utiliser un changement de variable.*

Sommes de Riemann

Exercice 23
Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ quand
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n+1)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$;

Exercices classiques

Exercice 24 — *Intégrales de Wallis*

Soit n un entier naturel et

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

1. a) Calculer I_0, I_1, I_2.
   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

   b) Calculer nI_nI_{n-1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I_n}{I_{n-2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1$$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$, et en déduire que $I_n \sim I_{n-1}$.

c) Utiliser le résultat de la question 2.b pour en déduire un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 25

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.
3. a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
   b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 26

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0\,;1]$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

2. En intégrant ces égalités sur l'intervalle $[0\,;1]$, trouver la limite des suites

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\text{et} \quad t_n = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 27

On considère la suite d'intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\, dx$ où n est un entier positif.

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$.
   Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.
2. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que $\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$.
4. Calculer la valeur de $J_n + J_{n-1}$ en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour finir...

Exercice 28

Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, avec f de signe constant.
   a) Démontrer que

$$\left[\inf_{x\in I} g(x)\right] \int_a^b f \leqslant \int_a^b f \times g \leqslant \left[\sup_{x\in I} g(x)\right] \int_a^b f$$

   b) Démontrer qu'il existe $y \in [a\,;b]$ tq

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = g(y) \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 dont la dérivée soit de signe constant sur $[a\,;b]$, et g une fonction continue sur $[a\,;b]$. Démontrer qu'il existe $y \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f g = f(a) \int_a^y g + f(a) \int_y^b g$$

Indication : *Poser $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, faire une intégration par parties et utiliser la question précédente.*

Exercice 29

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} t^2 \sin t\, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de F et montrer que F est de classe C^∞ sur cet ensemble.
2. Montrer que F est une fonction paire.
3. Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x)$.