Fonctions usuelles

BCPST 1 — 2022/2023

I — Vocabulaire sur les fonctions

Définition I.1 — Fonction numérique
*On appelle **fonction numérique** toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition I.2 — Domaine de définition
Soit une expression algébrique $f(x)$ dépendant d'une variable x.
*L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle **le domaine de définition** $\mathcal{D}_f$ de f.*
L'expression algébrique $f(x)$ définit donc une fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition I.3 — Image, antécédent d'un réel
Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow R$ une fonction.
*Soit x un élément de $\mathcal{D}$ et $y = f(x)$: y est l'**image** de x par la fonction f et x et **un antécédent** de y par l'application f.*

Définition I.4 — Opérations usuelles sur les fonctions
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. On définit

- *le **produit de f par un scalaire λ*** $\quad \lambda f : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right.$
- *la **somme de f et de g*** $\quad f+g : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$
- *le **produit de f et de g*** $\quad f \times g : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$

*Sur l'ensemble $J = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$, on peut définir **l'inverse de f** par*

$$1/f : \left| \begin{array}{lcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/f(x) \end{array} \right.$$

Définition I.5 — Composée de deux fonctions
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ qui prend ses valeurs dans un ensemble $\mathcal{E}$ et g une fonction numérique de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.
*On définit la **composée de f et g** notée $\boldsymbol{g \circ f}$ par*

$$g \circ f : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Définition I.6 — **Fonctions et ordre**

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *f est **majorée sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant M$$

2. *f est **minorée sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant m$$

3. *f est **bornée sur $\mathscr{D}$** si et seulement si f est majorée et minorée sur $\mathscr{D}$.*
4. *f est **croissante sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$

5. *f est **strictement croissante sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

6. *f est **décroissante sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

7. *f est **strictement décroissante sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)$$

8. *f est **monotone sur $\mathscr{D}$** si et seulement si f est croissante sur $\mathscr{D}$ ou décroissante sur $\mathscr{D}$.*
9. *f est **strictement monotone sur $\mathscr{D}$** si et seulement si f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ ou strictement décroissante sur $\mathscr{D}$.*
10. *f est **périodique de période T sur $\mathscr{D}$** si et seulement si*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad x + T \in \mathscr{D} \quad \Longrightarrow \quad f(x+T) = f(x)$$

11. *f est une fonction **paire** si et seulement si*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad -x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

12. *f est une fonction **impaire** si et seulement si*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad -x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Propriété I.7 — **Caractérisation des fonctions bornées**

Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |f(x)| \leqslant C$$

II — Fonctions monômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

Cas n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas n impair

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

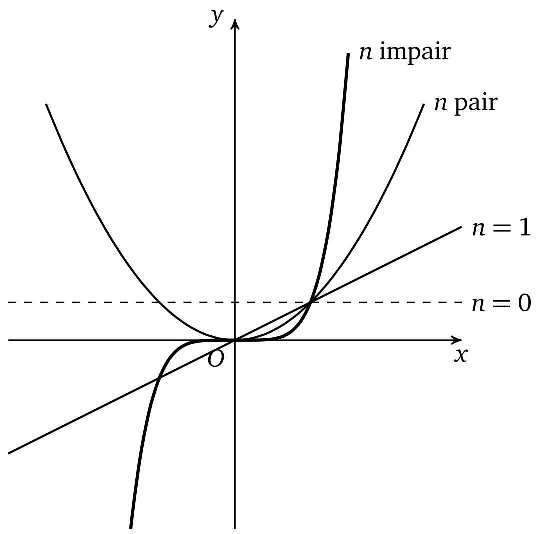

Figure 1 — *Graphe de $x \mapsto x^n$*

III — Racine carrée

Définition 3.1 — Racine carrée

La fonction $f \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

*Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f\langle \mathbb{R}_+ \rangle = \mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est la fonction **racine carrée**, définie et continue sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{\cdot} \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.*

Propriété 3.2 — Racine carrée

Soit x et y deux réels positifs. On a

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2) si $x \neq 0$, $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$;
3) pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$;
4) $\sqrt{x^2} = |x|$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

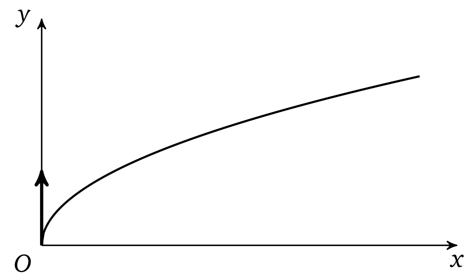

Figure 2 — *Graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$*

IV — Logarithme népérien

Définition 4.1 — Logarithme népérien

La fonction $f \; : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$ *est définie sur un intervalle et continue : elle admet une unique primitive s'annulant en* 1. *Cette primitive est la fonction* ***logarithme népérien*** **ln**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Théorème 4.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \qquad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Corollaire 4.3 $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(1/x) = -\ln x$

Corollaire 4.4 $\qquad \forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$

Définition 4.5 — Logarithme de base *a*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle ***logarithme de base a*** *et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier on a $\log_a(a) = 1$.

Propriété 4.6

1) $\ln$ *est une fonction continue et strictement croissante.*
2) $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *;*
3) $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ *;*

Propriété 4.7 — **Propriétés dite de « croissances comparées »**

1) $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*;*
2) $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

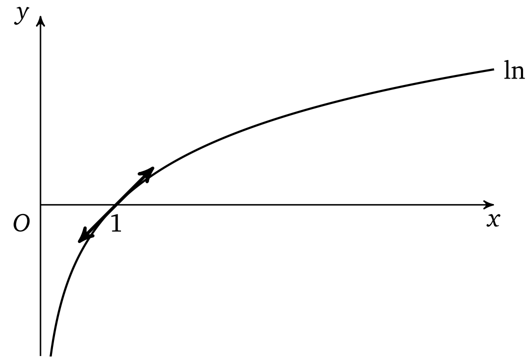

Figure 3 — *Graphe de* $\ln$

V — Exponentielle

Définition 5.1 — **Exponentielle**
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ *étant continue et strictement croissante sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+^*$*, elle définit une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\ln\left\langle\mathbb{R}_+^*\right\rangle = \mathbb{R}$*. Sa bijection réciproque est la fonction* ***exponentielle****, noté* **exp**.

Théorème 5.2 — **Propriété caractéristique de l'exponentielle**

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on peut alors noter $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée.

PROPRIÉTÉ 5.3

La fonction exp

1) *est continue et strictement croissante ;*
2) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$*;*
3) *dérivable et égale à sa dérivée.*

PROPRIÉTÉ 5.4 — **Propriétés dite « de croissances comparées »**

1) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *;*
2) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\Vert$	$+$	
			$+\infty$
$\ln$		$\nearrow$	
	$-\infty$		

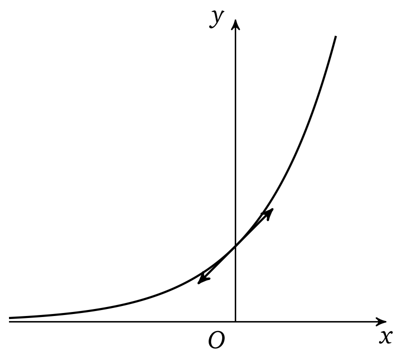

FIGURE 4 — *Graphe de* exp

VI — FONCTION PUISSANCE RÉELLE

DÉFINITION 6.1 — **Fonction puissance**

Soit a un réel strictement positif et x un réel quelconque. Alors par définition $a^x \overset{\text{déf.}}{=} \exp(x\ln(a))$.

On parle parfois d'exponentielle de base a.

PROPRIÉTÉ 6.2

1) *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:* $a^{x+y} = a^x a^y$ *et* $a^{xy} = a^{xy}$.
2) *Pour* $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *:* $(ab)^x = a^x b^x$.

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

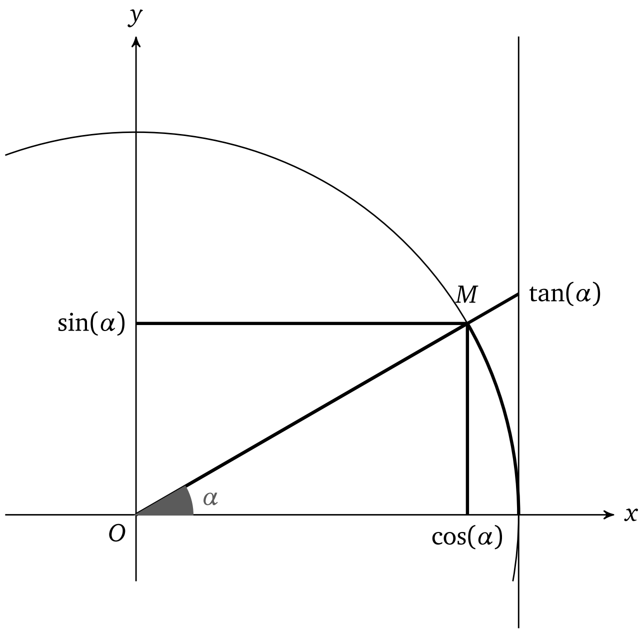

FIGURE 5 — *Définition des fonctions circulaires*

DÉFINITION 7.1 — **Fonctions circulaires**

Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Soit α un nombre réel. On parcourt le cercle trigonométrique en partant du point $A(1,0)$ et en se déplaçant dans le sens trigonométrique (si $\alpha \geqslant 0$) ou dans le sens contraire (si $\alpha < 0$). Lorsqu'on a parcouru la distance $|\alpha|$, on s'arrête en un point M.
*Le point M définit un **angle orienté** dont le réel α est **une mesure**. L'abcisse de M s'appelle le **cosinus** de α (noté $\cos(\alpha)$) et son ordonnée le **sinus** de α (noté $\sin(\alpha)$.*

THÉORÈME 7.2 — **Mesures d'un angle**

*Il existe une infinité de réels α permettant, par le procédé de construction précédent, de parvenir au point M. Ces réels s'appellent les **mesures de l'angle $\widehat{AOM}$**. Plus précisément, si β est l'une de ces mesures, alors pour toute mesure α de l'angle $\widehat{AOM}$ il existe un entier k tel que $\alpha = \beta + 2k\pi$.*

Dans un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, comme par exemple $]-\pi\,;\,pi\,]$ ou encore $[\,0\,;\,2\pi\,[$, un angle admet une unique mesure.

DÉFINITION 7.3 — **Mesure principale d'un angle**

*Un angle $\widehat{AOM}$ étant donné, il existe une unique mesure de cet angle dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On appelle ce réel **la mesure principale** de l'angle $\widehat{AOM}$.*

PROPOSITION 7.4
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *et* $\sin(-\alpha) = \sin(\alpha)$ *(en considérant la symétrie d'axe (Ox)) ;*
2) $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$ *et* $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$ *(en considérant la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$) ;*
3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ *et* $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ *(en considérant la symétrie d'axe (Oy)) ;*
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$.

PROPOSITION 7.5
$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha).$

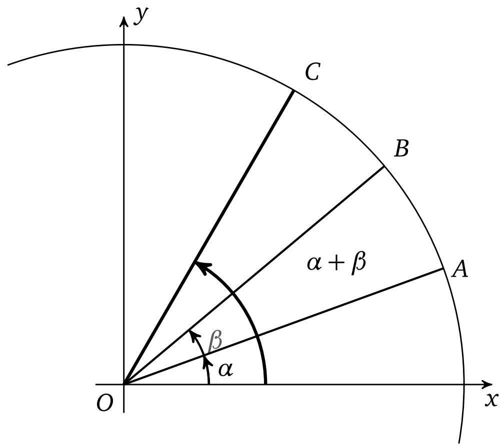

FIGURE 6 — *Démonstration de* $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

PROPOSITION 7.6 — **Équations trigonométriques**
Soit α et β deux réels.

$$\begin{array}{rcll}
\cos(\alpha) = \cos(\beta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi \\
\sin(\alpha) = \sin(\beta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \\
\cos(\alpha) = \cos(\beta) \text{ et } \sin(\alpha) = \sin(\beta) & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, & \alpha = \beta + 2k\pi
\end{array}$$

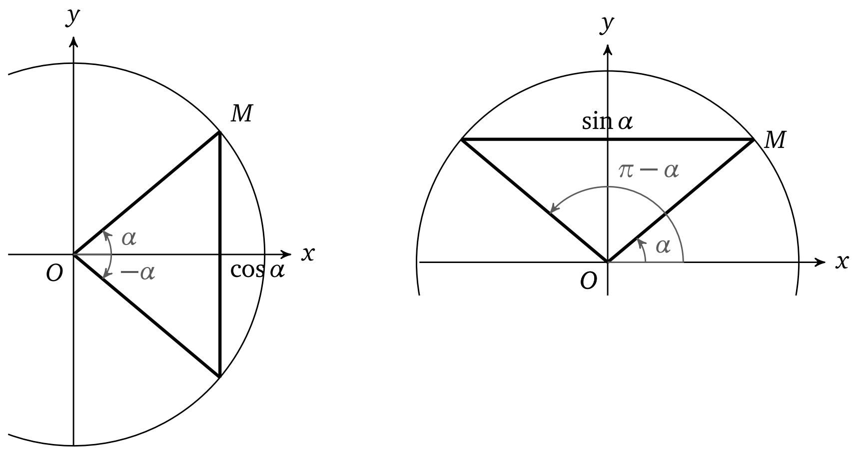

Figure 7 — *Équations trigonométriques*

Soit x un réel de $[-1\,;1]$.
D'après le théorème précédent, il existe un unique réel α dans $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = x$. On le note $\operatorname{Arccos} x$.
Par ailleurs, il existe un unique réel α dans $[-\pi/2\,;\pi/2]$ tel que $\sin\alpha = x$. On le note $\operatorname{Arcsin} x$.

Définition 7.7 — Tangente d'un réel
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *La* ***tangente*** *de* α *est* $\tan\alpha \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

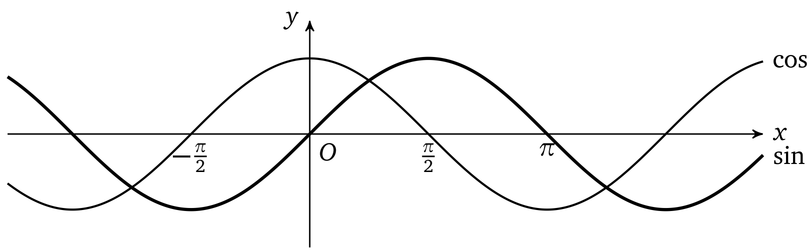

Figure 8 — *Graphes de* sin *et* cos

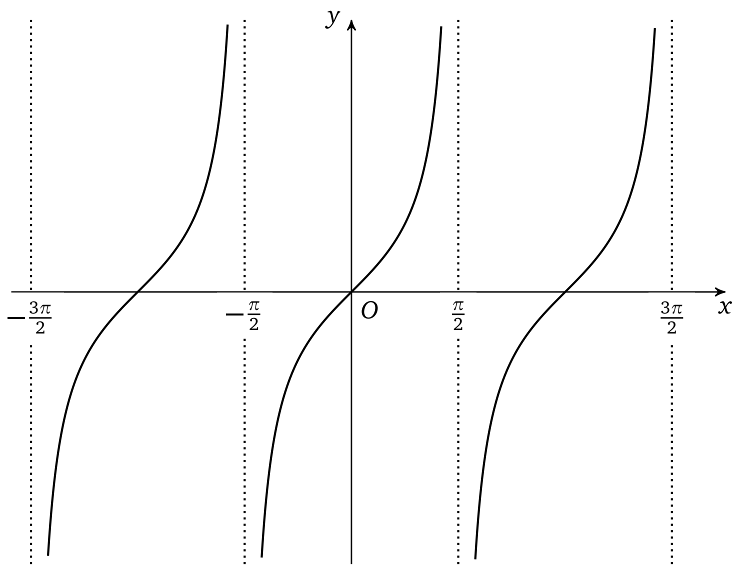

Figure 9 — *Graphe de* tan