Fonctions dérivables

BCPST 1 — 2020/2021

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point, x_0 est un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

Définition 1.1 — Nombre dérivé en un point
La fonction $\boldsymbol{f}$ ***est dérivable en*** $\boldsymbol{x_0}$ *si et seulement si le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *admet une limite finie en x_0.*
Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle **le nombre dérivé de f en x_0**.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Théorème 1.2 — Tangente en un point de $\mathscr{C}_f$
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale *au point $(x_0, f(x_0))$.*
Cette tangente a alors pour équation

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$ *si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une* ***tangente verticale*** *en x_0.*

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Définition 1.4 — Dérivabilité à gauche, à droite.
On dit que f est ***dérivable à gauche*** *en x_0 (resp.* ***à droite*** *en x_0) si et seulement si f est définie en x_0 et que la fonction*

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).
Dans ce cas, nous noterons cette limite $f'_+(x_0)$ (resp. $f'_-(x_0)$). Elle s'appelle ***le nombre dérivé à droite de f en x_0*** *(resp.* ***le nombre dérivé à gauche de f en x_0****).*

Propriété 1.5 — *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

II — Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée
*Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur I**.*
*La fonction $f' \ : \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.*

Propriété 2.2 — *Si une fonction f est dérivable sur un domaine $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$.*

Définition 2.3 — Fonction de classe C^n sur I
*Une fonction f est **de classe C^n sur I** si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n–ième de f est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.*
*La fonction f est **de classe C^∞ sur I** si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.*

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (I)
Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est dérivable sur I, de fonction dérivée $\lambda f'$;*
2) *la fonction $f+g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f'+g'$;*
3) *la fonction $f \times g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.*

Propriété 2.5 — Opérations algébriques (II)
Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;*
2) *la fonction $f+g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;*
3) *la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.*

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f+g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞.

Propriété 2.6 — Dérivée de la composée
Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \ : \ J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Corollaire 2.7 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f\langle I\rangle \subset J$.*
Si f et g sont dérivables sur leurs domaines de définition (resp. de classe C^n, de classe C^∞) alors $g \circ f$ est dérivable (resp. de classe C^n, de classe C^∞).

Corollaire 2.8 — Dérivée d'un quotient
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.
Si la fonction f/g est définie sur I, alors f/g est dérivable sur I, de fonction dérivée $\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$.

Théorème 2.9 — Dérivée de la bijection réciproque
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f\langle I\rangle$.
Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

III — Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux
*On dit que f admet un **maximum local** (resp. **un minimum local**) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0-\alpha\,;\,x_0+\alpha[\,\cap I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$(\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$

Théorème 3.2 — *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire* pas une borne *de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$.
Soit f *une fonction continue sur* $[\, a\ ;\ b\,]$ *et dérivable sur* $]\, a\ ;\ b\,[$. *Il existe* $c \in\ ]a\ ;\ b[$ *tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 3.5 — *Soit* $f\ :\ \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. La fonction* f' *est nulle sur un intervalle* I *si et seulement si* f *est constante sur* I.

Corollaire 3.6 — *Si* f' *est positive (resp. négative) sur* I *alors* f *est croissante (resp. décroissante) sur* I.

Corollaire 3.7 — *Si* f' *est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans* I *alors* f *est strictement croissante sur* I *(resp. strictement décroissante).*