Fonctions dérivables

BCPST 1 — 2020/2021

Exercices d'applications

Exercice 1
Calculer l'équation de la tangente à la courbe de f au point x_0 donné

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ en $x_0 = 4$;
2. $f(x) = 4\cos(x) + 2\sin x \cos x$ en $x_0 = \pi/2$;
3. $f(x) = 2\tan^2(x) + 1$ en $x_0 = \pi/3$.

Exercice 2
Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas d'étudier le domaine de dérivabilité)

1. $x \mapsto x^{5/2}$;
2. $x \mapsto x^{-5/2}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$;
4. $x \mapsto \exp(\sin x)$;
5. $x \mapsto \sin(\exp(1/x))$;
6. $x \mapsto \sin\sin\sin\sin x$;
7. $x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;
8. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}(1-x)\sin x \cos^2 x$;
9. $x \mapsto \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^7)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^7)^5}$.

Exercice 3
Étudier l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$x^x \quad ; \quad \ln\left(1+\sin(x)^2\right)$$
$$\left(1+x^4\right)^{1-2x} \quad ; \quad \frac{1}{1+\tan(x)} \quad ; \quad \sqrt{|1-x^2|}$$
$$\sqrt[3]{x} \quad ; \quad \ln^2\left(3x^2-\mathrm{e}\right) \quad ; \quad \cos(\sin(x))$$

Exercice 4
Dans la colonne de gauche figurent des fonctions, dans la colonne de droite figurent leurs dérivées, dans le désordre. Associez à chaque fonction sa dérivée.

1)	$\ln(\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x - 1})$	$a)$	$\dfrac{4}{(1-4x)^2}$
2)	$\dfrac{1}{1-4x}$	$b)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$
3)	$\ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$	$c)$	$\dfrac{3}{x}\dfrac{1}{9+\ln^2(x)}$
4)	$\sqrt{2x+4}$	$d)$	$\dfrac{-4x}{\sqrt{x^4+1}}$
5)	$\operatorname{Arctan}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$	$e)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
6)	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$f)$	$\dfrac{3}{1+x^2}$
7)	$-\dfrac{1}{3x-1}$	$g)$	$(2x\ln(x)+x)\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$
8)	$x^{(x^2)}$	$h)$	$\dfrac{3}{(3x-1)^2}$
9)	$\operatorname{Arctan}\dfrac{\ln x}{3}$	$i)$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}$

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{f(h)}-\mathrm{e}^{f(2h)}}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x)-xf(x+h)}{h}$$

Exercice 6
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors la fonction dérivée f' est impaire (resp. paire). Étudier la réciproque.

Exercice 7
Trouver le domaine de dérivabilités et calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Exercice 8
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Étudier l'existence de f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(-1)$.

Étude de régularité

Exercice 9
La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable sur $[0\,;1]$?

Exercice 10
Étudier la dérivabilité de f, et calculer sa fonction dérivée

1. $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-|x|} \end{array}\right.$.
3. $f : \left|\begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\sqrt{x} \end{array}\right.$

Exercice 11
Déterminer la classe de la fonction

$f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left|\begin{array}{ll} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$

pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 12
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$\text{et} \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0$$

Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14
La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet-elle un prolongement C^1 à $\mathbb{R}$?

Exercice 15
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en 0.

Application de la dérivée

Exercice 16
Étudier les extrema de $\ln\left[\dfrac{1+x}{(3+x)^2}\right]$.

Exercice 17

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}$.
2. Montrer l'inégalité
$$\forall x \in [-1\,;+\infty[\,, \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x} \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$$
3. Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \tan\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}\right)$?

Exercice 18
Calculer

$$\sup\left\{-x^3 + \frac{75}{4}x\,;\ x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leqslant 13x^2\right\}$$

Exercice 19
Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$
2. $\forall x \in \,]-1\,;+\infty[\,, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$

Exercice 20
Montrer que pour tout entier n et tout réel x

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 21
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 22
Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 23
Soit $a \in]0\,;1[$. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leqslant (n+1)^a - n^a \leqslant \frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}}$.

Exercice 24
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, calculer f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ? Quels sont ses points d'inflexions ?
4. Tracer le graphe de f.

Problèmes

Exercice 25
Déterminer la dérivée n–ième des fonctions
$x \mapsto 1/x$; $x \mapsto \ln(1+x)$ $x \mapsto \sin(x)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$; $x \mapsto (1+x)^n x^2$;

Exercice 26
Soit $f :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in]-1\,;1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : *Que peut-on-dire de la fonction* Arctan(f) *?*

Exercice 27
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ telle que $\forall x \in [a\,;b], f(x) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\dfrac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Exercice 28
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 29
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est minorée par $\lambda > 0$ sur I. Démontrer que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Étudier la réciproque.

Exercice 30
Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$, de degré n. On suppose que P admet r racines distinctes $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$.
1. Démontrer que P' admet au moins $r-1$ racines distinctes. Que dire du nombre de racines de P'', $P^{(3)}$, etc. ?
2. Si $r > n$, montrer que $P^{(n)}$ admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'un polynôme réel de degré au plus n n'admet pas plus de n racines distinctes.

Exercice 31
Soit f une fonction n fois dérivables sur $[a\,;b]$ ayant $n+1$ racines sur ce segment. Montrer qu'il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 32
Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par

$$\text{si} \quad x \neq 1 \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$$
$$\text{et} \qquad h(1) = 0$$

1. h est-elle continue en 1 ?
2. h est-elle dérivable sur $]0\,;1[$? sur $[0\,;1]$?
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad |h(x)| < a \qquad (1)$$
$$\forall x \in [0\,;1] \qquad \left|h'(x)\right| < \frac{b}{\sqrt{1-x}} \qquad (2)$$

Exercice 33
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$. Montrer que g est dérivable sur I et déterminer g' à l'aide du résultat précédent.
3. Retrouver la valeur de g' en explicitant g.

Exercice 34
Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 35
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in]0\,;1[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$$

1. Étudier la fonction f définie par
$$\forall x \in]0\,;1[\,, \qquad f(x) = \frac{e^x}{x+2}$$
2. Montrer que f admet un unique point fixe α.
3. Montrer que $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
4. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_n - \alpha|$$
et conclure quand à la convergence de u.

Exercice 36
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in [\,0\,;1\,] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{1+e^{u_n}}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\,0\,;1\,]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ tel que
$$\alpha = \frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}$$
3. Montrer que
$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad \left|\frac{e^x}{1+e^x} - \alpha\right| \leqslant \frac{e}{4}|x-\alpha|$$
4. Montrer ensuite que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{e}{4}|u_n - \alpha|$$
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$
et conclure quand à la convergence de u.

Exercice 37
Soit P_n une fonction polynôme de degré au plus n. Montrer que l'équation $P_n(x) = e^x$ ne peut pas avoir un nombre de solutions supérieur ou égal à $n+2$.

Dérivée d'ordre supérieur

Exercice 38
Calculer la dérivée n–ième des fonctions

1. $f_1(x) = 1/x$;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ (déterminer tout d'abord 3 réels a, b et c tels que $f_2(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$) ;
3. $f_3(x) = x^2 e^{3x}$;
4. $f_4(x) = x^{n-1}\ln x$.

Exercice 39
Calculer la dérivée d'ordre n de $e^{\sqrt{3}x}\sin(x)$

Exercice 40
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 41
Étude de la suite définie par $\quad u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$

1. Étudier la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ sur l'intervalle I qui vous semble le plus judicieux.
2. Montrer que la suite u est bien définie.
3. Étudier les points fixes de f. On notera α le point fixe positif de f.
4. a) Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, $\quad \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |1-\alpha|$.
   Montrer que u est convergente. Que pouvez-vous dire de la monotonie de u ?

Exercice 42
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x+1)$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. *Étude de la fonction f.*
   a) Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que pour tout x réel, on a :
   $$f(x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1).$$
   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   d) Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à (C) et étudier la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote D.
   e) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
   Étudier le signe de f' et donner le tableau de variations de f.
   f) Déterminer la solution, notée α, de l'équation $f(x) = x$.
   g) Montrer que pour tout x réel $f''(x) = -2\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
   h) En déduire que
   $$\forall x \in [0\,;1],\quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{e-1}{e+1}$$
2. *Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :
   $$f(0) \simeq 0{,}61 \quad f(1) \simeq 0{,}37 \quad \ln(e-1) \simeq 0{,}54$$
   a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in [0\,;1]$
   b) Montrer par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^n$$
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à préciser.

Exercice 43

On pose $f(x) = x^4 + x - 3$ pour tout x réel.

1. Montrer que f possède deux racines réelles, l'une notée a comprise entre 1 et 2, l'autre notée b comprise entre -2 et -1.

On pose $g(x) = \sqrt[4]{3-x}$.

2. Montrer que $g([1\,;2]) \subset [1\,;2]$.
3. On dit qu'une fonction φ d'un intervalle $[a\,;b]$ dans lui–même est strictement contractante sur $[a\,;b]$ ssi il existe un réel $k \in [0\,;1[$ tel que
   $$\forall (x,y) \in [a\,;b]^2,\quad \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| < k\,|x-y|$$
   Montrer que g est strictement contractante sur $[1\,;2]$.
4. Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$. On montrera que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |u_n - a| < k^n\,|1-a|$$
   où k est une constante réelle à préciser.