

DÉNOMBREMENT

BCPST I — 2022/2023

DÉNOMBREMENT À MAÎTRISER

Exercice 1

1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississippi* ?
2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans $(a + b + c + d)^{10}$

Exercice 2

On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre ?

Exercice 3

De combien de façons différentes peut-on choisir p entiers (x_1, x_2, \dots, x_p) dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ de façon à ce que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$?

Exercice 4

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 5

Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne. Quel est le nombre...

1. ... de tirages possibles ?
2. ... de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. ... de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. ... de tirages contenant les trois couleurs ?

Exercice 6

Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 €

dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

Exercice 7

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

Exercice 8 — Problème des rencontres

Lors d'un dîner, 5 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

Exercice 9

Dans le quadrillage \mathbb{N}^2 , on appelle chemin croissant tout parcours partant de l'origine, qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur N ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. A et B sont les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (p, n) .
Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B ?
3. On appelle chemin strictement croissant reliant A à B les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite. Combien y a-t-il de tels chemins ?

Exercice 10

Soit $E = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

1. Combien y'a-t-il de couples (x, y) dans E^2 ?
2. Combien de couples $(x, y) \in E^2$ tels que

- A) $x + y = n$?
- B) $x \neq y$?
- C) $x \leq y$?
- D) $x < y$?
- E) $x + y = k$ avec $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$?

Exercice 11

Soient p et q deux entiers. Dénombrer les mots écrits avec uniquement des 0 et des 1 :

1. comportant $p + q$ occurrences de 0 ou de 1 ;
2. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 ;
3. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1, sans que deux 0 ne soient consécutifs ;
4. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 avec au plus une série de 0 ; deux séries de 0 ; k séries de 0.

ENTRAÎNEMENT

Exercice 12

On note A l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec les chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

1. Combien y a-t-il d'éléments de A ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

Exercice 13

Soit E un ensemble de cardinal n .

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
INDICATION : Discuter suivant le nombre d'éléments de A .
2. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.
3. En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = E$. (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

Exercice 14

Soit E un ensemble fini, non vide, de cardinal n , A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b . On note

c le cardinal de $A \cup B$. Calculer $\#A \cap B$, $\#\bar{A} \cap B$, $\#A \cap \bar{B}$, $\#\bar{A} \cap \bar{B}$, $\#\bar{A} \cup B$, $\#A \cup \bar{B}$, $\#\bar{A} \cup \bar{B}$, en fonction de a , b , c et n .

Exercice 15

Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
 - A) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
 - B) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

Exercice 16

Soit Ω l'ensemble des nombres entiers naturels formés de 4 chiffres pris dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soit A le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont 4 chiffres différents, B le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont exactement un chiffre doublé, C celui dont les éléments ont exactement 2 chiffres distincts doublés, D celui dont les éléments ont exactement un chiffre triplé, E celui dont les éléments ont 4 fois le même chiffre.

1. Calculer le cardinal de Ω , A , B , C , D et E .
2. Montrer que (A, B, C, D, E) forme une partition de Ω .
3. On additionne tous les nombres de Ω . Quelle est la somme trouvée ?

Exercice 17

Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

Exercice 18

On remplit une urne avec n boules numérotées de 1 à n , avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les 5 premières boules sont blanches, les 5 suivantes noires, les 5 suivantes blanches, etc.

1. Combien y'a-t-il de boules portant un numéro pair dans l'urne ? Portant un numéro impair ?
2. Combien y'a-t-il de boules blanches dans l'urne ? de noires ?
3. Combien y'a-t-il de boules blanches portant un numéro pair ?

Exercice 19

Dans le plan, on considère n points M_1, M_2, \dots, M_n tels

que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à n cotés que l'on peut construire avec ces points ?

Exercice 20

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

Exercice 21

Combien y a-t-il de mots de n lettres formés des lettres a et b tels que

1. Il n'y ait jamais deux a ou deux b consécutifs.
2. Il y ait exactement un double a (pas de triples et pas d'autre double).
3. Il y ait exactement deux doubles a (pas de triples et pas d'autre double).

Exercice 22

On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartir les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

Exercice 23

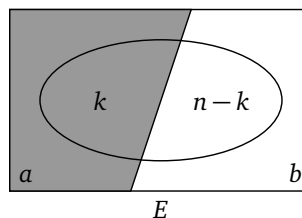
Dans une urne on place n boules blanche et une seule noire. On tire simultanément k boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

Exercice 24 — *Formule de Vandermonde*

Démontrer que, pour a, b et n entiers naturels,

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

On pourrait compter de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à n éléments d'un ensemble à $a + b$ éléments.



Exercice 25

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *anagramme* ? Si on range ces mots par ordre alphabétique, à quelle place apparaît le mot *anagramme* ?

Exercice 26

Calculer la somme des nombres obtenus en permutant les chiffres 1, 2, 3, 5, 8 de toutes les façons possibles.

Exercice 27

Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet de trois lettres. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres construits à partir de l'alphabet A , commençant par a ou b et contenant au moins une fois la lettre c ?

Exercice 28

Une classe comporte 44 élèves. De combien de façons peut-on le diviser en deux groupes de TD de 22 ? En 4 groupes de 11 élèves ? Plus généralement, combien y a-t-il de partitions en n parties de p éléments pour un ensemble de cardinal np ?

UN PEU PLUS ABSTRAIT...

Exercice 29

Soit $A = \{a, b, c, d\}$ un alphabet de quatre lettres et $n \geq 4$ un entier. Dénombrer l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet A dans lesquels chaque lettre apparaît au moins une fois.

Exercice 30

On place n points sur un cercle.

1. Dénombrer le nombre de cordes du cercles possibles (*i.e.* de segments joignant deux de nos n points).
2. Sans compter les n points de départ, en combien de points différents se coupent les cordes précédentes ? (On suppose les cordes trois à trois non concourantes).

POUR FINIR...

Exercice 31

n couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 32

Un code d'immeuble est formé d'une suite de deux chiffre (de 0 à 9), puis une lettre (A ou B), puis deux chiffre.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien de code contenant la lettre A et deux fois le chiffre 7 exactement ?
3. Ayant oublié le code d'un immeuble, mais constatant que les touches 2, 4, 5 et B sont plus usées que les autres, combien de combinaisons doit-on tester pour être sûr d'avoir la bonne ?

Exercice 33

On suppose qu'une personne ne peut avoir plus de 2 000 000 de cheveux sur la tête. Sachant qu'il y a strictement plus de 58 000 000 de personnes en France, montrer qu'au moins 30 personnes dans le pays ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Exercice 34

Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$, calculer la somme $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \#(X)$.

