

# APPLICATIONS LINÉAIRES

BCPST I — 2022/2023



## NOTATIONS DU CHAPITRE

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

## I — DÉFINITIONS ET OPÉRATIONS

### DÉFINITION I.1

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite **linéaire** si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) &= \lambda f(u)\end{aligned}$$

### Vocabulaire et notations

1. Les applications linéaires sont parfois qualifiées de **morphismes** d'espaces vectoriels. Elles forment l'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$ .
2. Si les espaces de départ et d'arrivée sont identiques ( $F = E$ ) on parle d'**endomorphisme** (ensemble  $\mathcal{L}(E)$ ).
3. Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme** (ensemble  $GL(E, F)$ ).
4. Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme** (ensemble  $GL(E)$ ).

### PROPRIÉTÉ I.2 — Opération sur les applications linéaires

Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , alors  $f + g$  et  $\alpha f$  sont deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

### PROPRIÉTÉ I.3 — Composée d'applications linéaires

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . L'application  $g \circ f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ .

### PROPRIÉTÉ I.4 — Distributivité de la composition sur l'addition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$  alors

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

- 2) Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux applications linéaires de  $F$  dans  $G$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

### PROPRIÉTÉ I.5 — Linéarité de la bijection réciproque

Soit  $f$  une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$ . La bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est une application linéaire de  $F$  dans  $E$ .

**Notation puissance** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note

1.  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $f$  composée  $n$  fois avec elle-même);
2. et  $f^0 = \text{Id}_E$  par convention.
3. Si  $f$  est bijective, on note  $f^{-n} = (f^{-1})^n$ .

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

**PROPRIÉTÉ 1.6**

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  : on a  $f^n f^m = f^{n+m}$ .

Si, de plus,  $f$  est bijective, alors cette propriété est vraie pour  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ .

**Attention!** En général, si  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ , il est faux d'écrire que  $(fg)^n = f^n g^n$ . Cette propriété est vraie si les endomorphismes  $f$  et  $g$  commutent.

**PROPRIÉTÉ 1.7 — Stabilité des espaces vectoriels**

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  alors  $f^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## II — NOYAU & IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

**DÉFINITION 2.1 — Noyau d'une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $f(u) = 0_F$ , d'inconnue  $u \in E$ , s'appelle le **noyau de  $f$** . On le note  $\text{Ker } f$  :  $\text{Ker } f = \{u \in E \text{ tel que } f(u) = 0_F\}$ .

**PROPRIÉTÉ 2.2**

$\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**THÉORÈME 2.3 — Injectivité et noyau**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .

**DÉFINITION 2.4 — Image d'une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble  $f(E)$  s'appelle l'**image de  $f$** . On le note  $\text{Im } f$ .

**THÉORÈME 2.5 — Image et surjectivité**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'application  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

### III — APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION

#### THÉORÈME 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire

Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est déterminée par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

#### PROPRIÉTÉ 3.2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille quelconque de  $E$ .

On a 
$$f \langle \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \rangle = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

#### DÉFINITION 3.3 — Rang d'une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **rang** de  $f$  la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Im } f$  :

$$\text{rg } f \stackrel{\text{déf.}}{=} \dim(\text{Im } f)$$

#### THÉORÈME 3.4 — Théorème du rang

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$$

#### COROLLAIRE 3.5

Soit  $f$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimensions finies.

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim E$ ;
- 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim F$ ;
- 3)  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim E = \dim F$ ;

#### COROLLAIRE 3.6

Si  $F$  est de dimension finie et si  $\dim F = \dim E$  alors on a l'équivalence

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

IV — MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

**DÉFINITION 4.1 — Matrice d'une application linéaire**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  et  $F$  de dimensions finies,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle **matrice de l'application linéaire**  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  la matrice de la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre la même base au départ et à l'arrivée. On note simplement  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  dans ce cas.

**THÉORÈME 4.2 — Unicité de l'application linéaire**

Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

**COROLLAIRE 4.3**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont  $M$  est la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$ .

**THÉORÈME 4.4 — Opérations et représentation matricielle**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E$  et  $F$  de dimensions finies,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

- 1)  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f + g) = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$ ;
- 2) pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$ .

**THÉORÈME 4.5 — Utilisation du produit matriciel – I**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $M$  la matrice représentant  $f$  dans une bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Si  $u$  est un vecteur de  $E$  représenté par  $U_{\mathcal{B}}$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors  $M \times U_{\mathcal{B}}$  représente  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

**THÉORÈME 4.6 — Utilisation du produit matriciel – II**

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes représentés respectivement par  $M$  et  $N$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Alors  $MN$  représente  $f \circ g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**THÉORÈME 4.7 — Utilisation du produit matriciel – III**

Soit  $f$  un endomorphisme représenté par la matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'endomorphisme  $f$  est bijectif si et seulement si  $M$  est inversible.

De plus, dans ce cas  $M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

**THÉORÈME 4.8 — Matrice d'une application linéaire et rang**

Soit  $f$  un endomorphisme représenté par la matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$\text{rg } f = \text{rg } M$$

